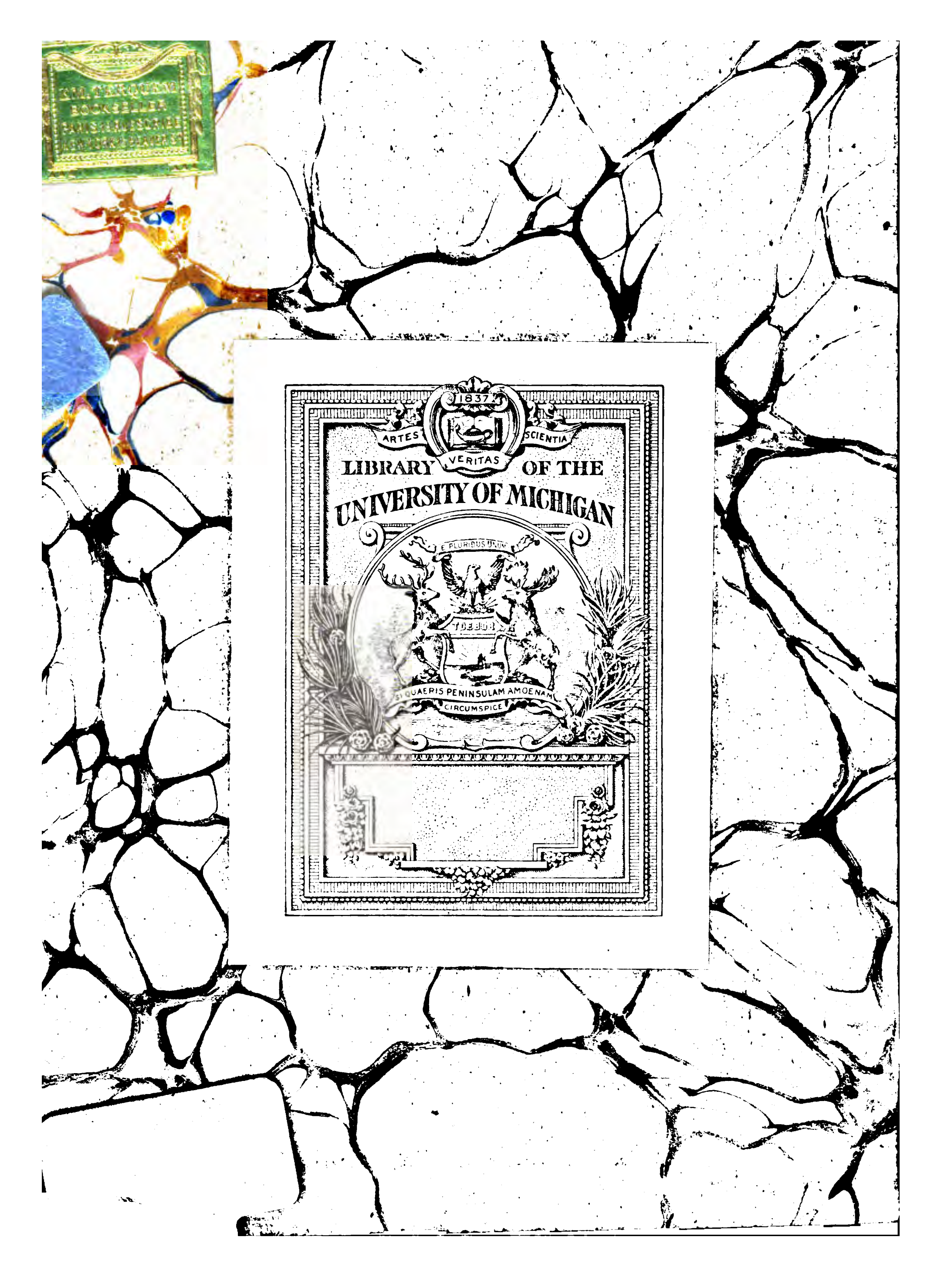

BOOKSELLER
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PROBLÈMES

DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

PAR

W. ROUSE BALL

FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

Deuxième édition française

traduite d'après la Quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick

---

DEUXIÈME PARTIE

Questions de géométrie — Questions de mécanique. Questions diverses — Carrés magiques — Problèmes des tracés continus — Trois problèmes de géométrie. Equation du 3e degré.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRIE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1908

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

ET

PROBLÈMES

DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

récréations un peu puériles et de jeux que les auteurs anciens auraient appelés jeux géométriques.

Nous nous sommes imposés comme règle de négliger toute discussion qui exigerait des connaissances trop avancées dans les mathématiques. De plus (à une exception près) nous ne ferons pas mention de tous les nombreux paradoxes géométriques reposant sur l'inexpérience de l'œil quand il s'agit de comparer d'une façon exacte les dimensions des figures lorsqu'on modifie leur position relative. Ces illusions apparentes n'infirment en rien l'exactitude d'un raisonnement rigoureux, elles reposent sur une fausse interprétation de sensations perçues par l'organe visuel et nous ne pouvons considérer les paradoxes qui en découlent comme étant du domaine des mathématiques.

Sophismes géométriques. — Tout le monde aujourd'hui possède quelques notions de géométrie et même une idée générale des éléments d'Euclide, mais on sait moins que les œuvres de ce grand géomètre étaient complétées à l'origine par des exercices divisés en trois séries. Les deux premières comprenaient des théorèmes et des problèmes faciles et le troisième était un recueil d'artifices géométriques dont il s'agissait de relever les erreurs.

La collection des artifices ainsi préparés par Euclide est perdue, et nous ne possédons aucun renseignement pouvant nous fixer sur la nature des raisonnements erronés employés, mais pour donner une idée de ce genre de questions nous présentons, ci-après, deux ou trois démonstrations conduisant à des conséquences manifestement absurdes et qui amuseront peut-être ceux pour qui elles sont nouvelles. Nous laissons à l'ingéniosité de nos lecteurs le soin de découvrir les fautes de raisonnement.

Premier sophisme. Démontrer qu'un angle droit est égal à un angle obtus. — Soit un rectangle ABCD ; par le sommet A menons une droite AE extérieure au rectangle, égale à AB ou DC et faisant, comme le montre la figure, un angle aigu

EAB avec le côté AB. Traçons CE et prenons les milieux K et H des deux droites CE, CB. Les perpendiculaires élevées à ces droites aux points K et H se rencontreront nécessairement en un certain point O puisque CB et CE ne sont pas parallèles.

Traçons OA, OD, OE, OC.

On a :

$$OA = OD \quad \text{et} \quad OE = OC,$$

de plus, par construction, AE = DC; donc les deux triangles ODC, OAE sont égaux comme ayant les trois côtés égaux et

$$\widehat{ODC} = \widehat{OAE}$$

ou encore

$$\widehat{ODA} + 1 \text{ droit} = \widehat{OAD} + \widehat{DAE}$$

Fig. 1.

mais le triangle ODA étant isocèle

$$\widehat{ODA} = \widehat{OAD},$$

donc finalement

$$\widehat{DAE} = 1 \text{ droit},$$

or, par construction, l'angle DAE est obtus.

Deuxième sophisme [1]. **Démontrer qu'un segment de droite est égal à la droite entière.** — Soit ABC un triangle quelconque; pour fixer les idées supposons l'angle B aigu et l'angle A plus grand que l'angle C.

[1] Voir une note de M. Coccoz dans l'*Illustration*, Paris, 12 janvier 1895.

Par le sommet A menons dans l'intérieur du triangle la droite AD faisant avec le côté AB un angle BAD égal à l'angle C et abaissons la perpendiculaire AE sur BC.

Les triangles ABC, ABD étant équiangles, et, par suite, semblables, on a :

$$\frac{\text{ABC}}{\text{ABD}} = \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{AD}}^2};$$

de même, les triangles ABC, ABD ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases, d'où la relation

$$\frac{\text{ABC}}{\text{ABD}} = \frac{\text{BC}}{\text{BD}}.$$

La comparaison de ces deux relations nous donne

$$(1) \qquad \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{AD}}^2} = \frac{\text{BC}}{\text{BD}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\text{BC}} = \frac{\overline{\text{AD}}^2}{\text{BD}}.$$

Or,

$$\overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - 2\,\text{BC.BE},$$

et

$$\overline{\text{AD}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BD}}^2 - 2\,\text{BD.BE},$$

et il vient, en remplaçant dans (1)

$$\frac{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - 2\,\text{BC.BE}}{\text{BC}} = \frac{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BD}}^2 - 2\,\text{BD.BE}}{\text{BD}},$$

d'où

$$\frac{\overline{\text{AB}}^2}{\text{BC}} + \text{BC} - 2\,\text{BE} = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\text{BD}} + \text{BD} - 2\,\text{BE},$$

ou après simplification et transposition

$$\frac{\overline{AB}^2}{BC} - BD = \frac{\overline{AB}^2}{BD} - BC,$$

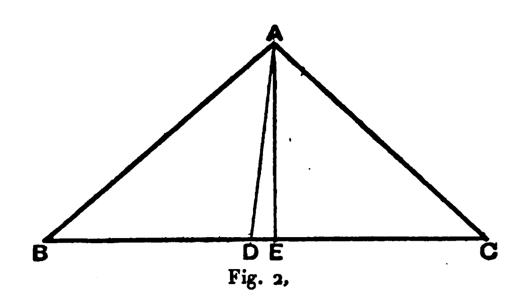


Fig. 2.

ou enfin

$$\frac{\overline{AB}^2 - BD.BC}{BC} = \frac{\overline{AB}^2 - BD.BC}{BD},$$

d'où l'on déduit ce résultat inadmissible, BC = BD.

Troisième sophisme. Démontrer que tous les triangles sont isocèles. — Soit ABC un triangle quelconque; prenons le milieu D du côté BC considéré comme base et, en ce point, élevons la perpendiculaire sur BC. Traçons maintenant la bissectrice de l'angle opposé A.

1° Si cette bissectrice ne rencontre pas la perpendiculaire à BC, elle lui est parallèle et, par suite, elle est perpendiculaire sur BC. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle.

2° Si la bissectrice de l'angle A rencontre la perpendiculaire élevée sur BC en son milieu, le point de rencontre O est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Supposons-le d'abord à l'intérieur et, de ce point, abaissons les perpendiculaires OE, OF sur AC, AB puis traçons OB, OC.

Le point O étant sur la bissectrice de l'angle A, les deux perpen-

diculaires OE, OF sont égales et les deux triangles rectangles OAE, OAF sont égaux, donc

(1) $AE = AF$

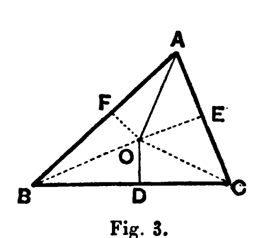


Fig. 3.

De même $OB = OC$ et les deux triangles rectangles OCE, OBF sont aussi égaux, d'où

(2) $EC = BF$

Additionnant membre à membre (1) et (2), il vient :

$$AE + EC = AF + BF \quad \text{ou} \quad AC = AB$$

d'où cette conclusion, que le triangle ABC est encore isocèle.

Supposons en second lieu que le point O soit à l'extérieur du triangle ABC. Faisons la même construction que ci-dessus. Les deux triangles rectangles OAE, OAF sont égaux et


(1) $AE = AF$.

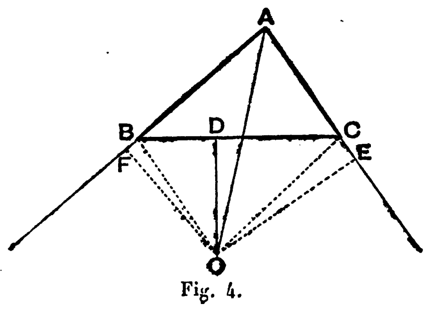


Fig. 4.

De même, l'égalité des deux triangles rectangles OCE, OBF nous donne

(2) $CE = BF$.

Retranchant alors membre à membre (1) de (2), il vient :

$$AE - CE = AF - BF, \quad \text{ou} \quad AC = BC$$

Donc, le triangle ABC est isocèle dans tous les cas possibles, résultat évidemment absurde.

Quatrième sophisme. — Nous devons à l'obligeance du capitaine Turton, communication de l'artifice ingénieux suivant :

Sur l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle DBC, on construit le triangle équilatéral ABC en plaçant le sommet A du même côté de BC que le sommet D. Sur CA on porte la longueur CH égale à CD. Soit K le milieu de BD. Traçons HK et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en L avec le prolongement de l'hypothénuse CB. Joignons le point L à D et prenons les milieux M et N des droites LD et LH. Les perpendiculaires menées à ces droites aux points M, N se rencontreront nécessairement en un certain point O qui sera situé à l'extérieur du triangle DBC et du côté de BC opposé au sommet D de l'angle droit.

Traçons maintenant OC, OD, OH, OL.

Les deux obliques OL, OD sont égales, de même que OL et OH, donc OD = OH et les triangles ODC, OHC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux. — D'où cette conclusion absurde que les deux angles OCD, OCH sont égaux.

Cinquième sophisme (¹). **Démontrer que si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, les deux autres côtés sont parallèles.** — Considérons un quadrilatère ABCD tel que les deux côtés opposés AB, CD soient égaux,

Prenons les milieux M, N des côtés opposés AD, BC et élevons en ces points les perpendiculaires sur ces côtés.

Si ces deux perpendiculaires ne se rencontrent pas, elles sont parallèles et il en est, par suite, de même des côtés AD, BC.

Si ces deux perpendiculaires se rencontrent, le point de rencontre O est à l'intérieur ou à l'extérieur du quadrilatère.

Supposons-le à l'intérieur et traçons les droites OA, OD, OB, OC. Les obliques OA, OD sont égales et il en est de même des obliques OB, OC; les deux triangles OAB, ODC sont donc égaux comme ayant les trois côtés égaux et

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}.$$

(¹) *Mathesis*, octobre 1893, série 2, vol. III, p. 224.

D'ailleurs

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOD}, \ \widehat{BON} = \widehat{NOC},$$

et l'addition membre à membre de ces trois égalités nous conduit à la relation

$$AOB + AOM + BON = DOC + MOD + CON,$$

d'où

$$MOA + AOB + BON = 2 \text{ droits}.$$

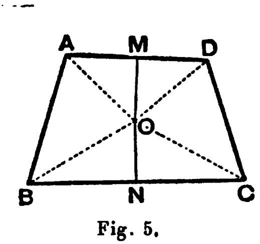


Fig. 5.

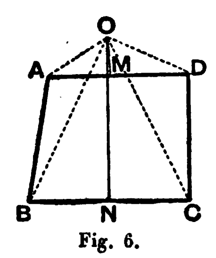


Fig. 6.

Les trois points M, O, N étant ainsi en ligne droite, les côtés opposés AD, BC sont bien parallèles.

Supposons, en second lieu, le point O à l'extérieur de la figure, et traçons les mêmes droites que plus haut.

On a encore :

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC} \quad \text{et} \quad \widehat{BON} = \widehat{NOC},$$

donc

$$\widehat{AOB} + \widehat{BON} = \widehat{DOC} + NOC \quad \text{ou} \quad \widehat{AON} = \widehat{NOD},$$

c'est-à-dire que ON est la bissectrice de l'angle AOD, cette droite coïncide donc avec OM et les deux côtés opposés AD, BC sont encore parallèles.

Cette conclusion n'est généralement pas exacte et la démonstration contient un point vicieux.

Sixième artifice. — La démonstration suivante est empruntée à un traité d'électricité publié en 1889 par deux mathématiciens distingués. Elle est présentée comme rigoureuse.

Un vecteur OP de longueur l peut être décomposé d'une infinité de façons en deux vecteurs OM et MP de longueurs l' et l''. Nous pouvons faire en sorte que le rapport $\frac{l'}{l''}$ ait une valeur quelconque comprise entre o et l'infini.

Supposons que le système soit rapporté à deux axes rectangulaires OX, OY et soient θ, θ', θ'' les angles que font respectivement OP, OM et MP avec Ox. On obtient, en projetant sur Oy et Ox, les relations

$$l \sin \theta = l' \sin \theta' + l'' \sin \theta'',$$
$$l \cos \theta = l' \cos \theta' + l'' \cos \theta,$$

d'où par division

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n \sin \theta' + \sin \theta''}{n \cos \theta' + \cos \theta''}, \quad \text{en posant} \quad \frac{l'}{l''} = n.$$

Ce résultat est vrai quelle que soit la valeur attribuée à n; or, n peut prendre toutes les valeurs, et si nous faisons, $n = \infty$ et $n = o$, nous arrivons à la double égalité

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta'',$$

résultat évidemment impossible.

Septième artifice. — Voici encore une détermination erronée de la valeur de π qui nous a été signalée pour la première fois par M. Chartres. Elle repose sur des quadratures bien connnes.

L'aire d'une demi-ellipse limitée à son petit axe, a pour expression $\frac{1}{2}\pi ab$ (en adoptant les notations usuelles). Supposons maintenant que le centre se déplace sur le grand axe qui devient ainsi de plus en plus grand, jusqu'à devenir infiniment grand; l'ellipse

devient à la limite une parabole et dans cette position limite particulière, l'aire est égal aux $\frac{2}{3}$ du rectangle circonscrit. Mais le premier résultat est également vrai quelles que soient les dimensions des éléments de la courbe.

On a donc

$$\frac{1}{2}\pi ab = \frac{2}{3}a \times 2b, \quad \text{d'où} \quad \pi = \frac{8}{3}.$$

Paradoxes géométriques. — Nous faisons suivre ces divers exercices de quelques questions qui ne peuvent être présentées comme de véritables artifices et qui conduisent à des résultats paraissant tout d'abord impossibles.

Premier paradoxe. — Voici un petit problème qui nous a été communiqué par M. Renton : il s'agit de faire exécuter une rotation complète de quatre angles droits à une surface plane (comme par exemple une carte ou une feuille de papier posée sur une table) de telle sorte que l'effet obtenu soit le même que si la surface avait seulement tourné d'un angle droit.

On demande, par exemple, en considérant le cas d'une feuille de papier, que la rotation complète produise le même effet qu'un déplacement de 90° autour d'un de ses points O; la solution est la suivante :

Décrivez sur la feuille de papier un carré OABC et faites la tourner de deux angles droits autour de la diagonale OB comme axe, puis de deux angles droits autour de OA comme axe ; le résultat demandé est alors atteint.

Second paradoxe. — En géométrie comme en algèbre, la théorie des probabilités conduit à de nombreux paradoxes ; en voici un exemple très simple :

On brise une canne ou une petite baguette en trois morceaux quelconques qui pourront être assemblés de façon à former un

triangle si la longueur du plus grand d'entre eux est moindre que la somme des deux autres, ou ce qui revient au même, si la longueur du plus grand est moindre que la moitié de la canne. Or, la probabilité de briser une baguette en deux fragments égaux est $\frac{1}{2}$; par suite, la probabilité de pouvoir construire un triangle avec les trois morceaux obtenus en brisant une baguette en trois devrait être exprimée par $\frac{1}{2}$.

Ce résultat est inexact, car la probabilité est $\frac{1}{4}$ (1).

Troisième paradoxe. — L'exemple suivant est un des mieux choisis pour montrer comment les démonstrations qui ne reposent que sur le témoignage du sens de la vue sont sujettes à erreur; en découpant les figures suivant certaines lignes et en effectuant un nouvel arrangement avec les parties obtenues on peut facilement se tromper dans les conclusions formulées. En général, les preuves par décomposition et superposition doivent être examinées et discutées soigneusement, à moins qu'elles ne soient accompagnées d'un raisonnement mathématique.

Les démonstrations que l'on trouve dans certains ouvrages à l'usage de l'Enseignement primaire des propositions suivantes :

1. *La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits;*

2. *Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit;*

pouvant être complétées, au besoin, par le raisonnement, doivent être considérées comme valables. Mais quand la preuve mathématique fait défaut, on peut arriver à des résultats qui paraissent étranges à première vue comme dans l'exemple que nous allons donner.

Dans ce dernier exercice on se propose de faire voir qu'un carré

(1) Voir un article de M. Lemoine dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome XI; 1883.

de papier ou de carton divisé, de même qu'un échiquier, en soixante-quatre petits carrés peut être découpé en quatre morceaux avec lesquels on formera par juxtaposition une figure contenant soixante-cinq carrés [1].

On arrive à ce résultat en coupant le carré primitif en quatre morceaux suivant les lignes marqués en traits forts sur la figure 7;

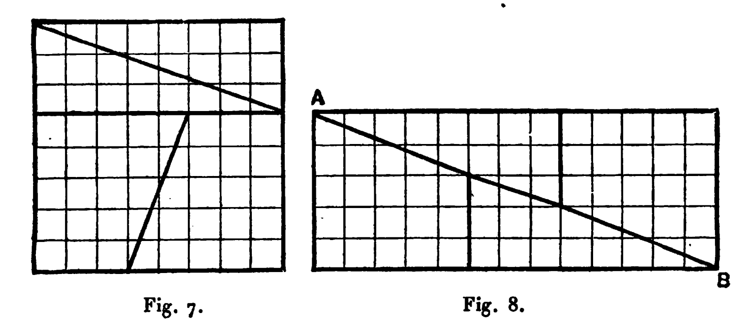


Fig. 7. Fig. 8.

en réunissant ensuite ces morceaux de manière à former un rectangle comme le montre la figure 8, on constate que ce rectangle contient 5×13 ou soixante-cinq petits carrés.

Ce phénomène qui n'est pas de nature à embarrasser un mathématicien, provient de ce que les sommets des quatre morceaux de papier ou de carton qui, dans la seconde figure paraissent se trouver sur la diagonale AB, ne coïncident pas en réalité exactement, avec cette direction. Ces sommets comprennent effectivement une figure ACBD en forme de losange dont la surface est égale à celle de l'un des soixante-quatre petits carrés, mais dont l'une des diagonales AB est bien plus grande que l'autre.

[1] Nous ne connaissons pas celui qui le premier a fait mention de ce paradoxe. Il est donné dans plusieurs livres modernes, mais nous ne trouvons pas de citation plus ancienne que celle qui en est faite par le prof. G.-H. Darwin, dans le *Messenger of Mathematics*, année 1877, vol. VI, p. 87.

On voit facilement, d'après la figure, que l'angle formé par les deux côtés du losange qui se rencontrent en A est égale à la différence de deux angles dont les tangentes sont respectivement $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{8}$; par suite, la tangente de l'angle en A du losange allongé ACBD est égale à $\frac{1}{46}$, c'est-à-dire que cet angle est plus petit que $1^\circ \frac{1}{4}$.

Pour distinguer à l'œil un angle aussi petit il est indispensable que les lignes de division de la première figure soient excessivement ténues et que les morceaux soient juxtaposés avec le plus grand soin.

Le paradoxe en question dépend de la relation.

$$5 \times 13 - 8^2 = 1.$$

On arrive à des résultats analogues au moyen des formules

$$13 \times 34 - 21^2 = 1,\ 34 \times 89 - 55^2 = 1, \ldots$$

ou encore en partant des formules

$$5^2 - 3 \times 8 = 1,\ 13^2 - 8 \times 21 = 1,\ 34^2 - 21 \times 55 = 1, \ldots$$

Les nombres 5, 8, 13, ... appartiennent à la série

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

qui provient du calcul des réduites de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Ozanam emploie un paradoxe semblable (1) pour démontrer l'égalité 289 = 288 au moyen d'un carré dont chaque côté est

(1) OZANAM. — Edition de 1803, vol. I, p. 299.

divisé en dix-sept parties égales. Il donne aussi un diagramme pour la division d'un rectangle comprenant $3 \times 11 = 33$ petits carrés égaux en deux autres rectangles dont les dimensions semblent être 5, 4 pour le premier, et 7, 2 pour le second.

La soixante dix-septième récréation du Capitaine Turton. — Le capitaine Turton a imaginé une récréation plus amusante encore basée sur la décomposition des figures.

Une feuille de carton de 33 centimètres sur 21 centimètres divisée en 77 petits carrés de chacun 3 centimètres de côté peut être découpée suivant les lignes de division et les carrés obtenus disposés de façon à reconstituer le rectangle primitif de 77 carrés avec un carré supplémentaire en saillie.

La construction est ingénieuse et ne se saisit bien qu'avec un modèle. L'artifice consiste à utiliser la faible épaisseur de la feuille de carton pour effectuer les coupes en biais, de façon que les bords de chaque carré présentent un léger biseau. Le biais est si peu apparent sur les pièces du modèle qu'on ne peut s'en apercevoir qu'en les examinant de très près.

Le jeu ainsi donné aux petits carrés permet de les assembler en produisant en apparence un carré supplémentaire.

Coloriage des cartes géographiques. — Abordons maintenant l'étude de cette proposition géométrique que *quatre couleurs sont suffisantes pour colorier la carte d'un pays* (divisée en départements, régions ou districts) *de telle sorte que deux régions contiguës ne soient pas de la même couleur.*

Par régions contiguës il faut entendre deux régions dont les contours coïncident sur une certaine étendue linéaire; deux régions dont les contours se touchent en un seul point ne sont pas considérées comme contiguës.

Ce problème a été mentionné par A. F. Möbius (1) dans ses leçons

(1) *Leipzig Transactions* (Math.-phys. classe), 1885, vol. XXXVII, pp. 1-6.

en 1840, mais il demeura inaperçu jusqu'à ce que Francis Guthrie [1] l'eut communiqué à de Morgan vers 1850, bien que, selon toute probabilité, il fut appliqué depuis de longues années par les fabricants de cartes géographiques. C'est en réalité de Morgan qui fit connaître cette proposition sur laquelle Cayley [2] appela de nouveau l'attention en 1878 en signalant qu'il n'en connaissait pas de démonstration rigoureuse.

Le raisonnement suivant, que nous ne présentons pas comme une démonstration régulière, permettra peut-être au lecteur de s'assurer de l'exactitude de la proposition.

Soient A, B, C trois régions contiguës et considérons une quatrième région X contiguë avec A, B et C. La région X ne peut occuper que deux positions : ou être complètement en dehors du contour limitant extérieurement la figure formée par les trois surfaces A, B, C; ou être complètement en dedans du contour limitant intérieurement la même figure : ces deux positions sont marquées X et X' sur notre figure. Dans les deux cas, toute portion libre de la surface du plan de la figure est comprise entre les contours de trois régions seulement et, par suite, il n'est pas possible de tracer une nouvelle région Y contiguë avec A, B, C et X. En d'autres termes, il est toujours possible de dessiner sur le plan quatre régions contiguës, mais il est impossible d'en dessiner cinq.

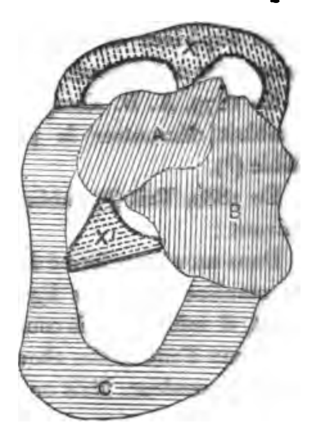


Fig. 9.

(1) *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 19 juillet 1880, vol. X, p. 728.

(2) *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1878, vol. IX, p. 148, et *Proceedings of the Royal Geographical Society*, 1879, N. S. vol. I, p. 259.

Si les régions A, B, C ne sont pas contiguës l'une avec l'autre, ou si X n'est pas contiguë avec A, B, C, il n'est pas nécessaire de les colorier toutes d'une façon différente, d'où il résulte que le cas le plus défavorable est celui qui vient d'être examiné. D'ailleurs l'une quelconque des régions peut diminuer en surface et finalement se réduire à un point sans que le raisonnement cesse de subsister.

Il est évident, d'après la figure 9, qu'il nous faut au moins quatre couleurs dans le cas le plus défavorable, puisque les quatre régions contiguës A, B, C, X doivent alors être coloriées d'une façon différente.

La démonstration de la proposition présente des difficultés d'un ordre supérieur et toutes les tentatives faites jusqu'ici pour les surmonter ont échoué.

En 1879, A. B. Kempe (1) avait présenté un raisonnement qui semblait démontrer la proposition, mais il contient un point faible (2).

En 1880, Tait (3) publia une solution reposant sur le théorème suivant :

Dans un réseau fermé de lignes joignant un nombre pair de points de manière que trois lignes seulement se rencontrent en chaque point, il suffit de trois couleurs pour tracer les lignes de telle sorte que deux d'entre elles aboutissant au même point ne soient pas de la même couleur. Mais on ne considère pas comme réseau fermé le

(1) Il envoya sa première démonstration à « l'*American Journal of Mathematics* », 1879, vol. II, pp. 193-200 ; mais ensuite il la communiqua sous une forme plus simple à la Société mathématique de Londres, *Transactions*, 1879, vol. X, pp. 229-231 et au journal *Nature*, 26 février, 1880, vol. XXI, pp. 399-400.

(2) Voir un article, par P.-J. Heawood dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, 1890, vol. XXIV, pp. 332-338 ; et 1897, vol. XXXI, p. 270-285.

(3) *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 19 juillet 1880, vol. X p. 729 et *Philosophical Magazine*, janvier 1884, série 5, vol. XVII, p. 41.,

cas où les lignes peuvent être partagées en deux groupes réunis par une seule ligne.

Il en déduisait comme conséquence que quatre couleurs sont suffisantes pour colorier une carte géographique. Sa démonstration qui a été reproduite dans la dernière édition du présent ouvrage, parut tout d'abord, si directe, qu'elle fut généralement admise: mais on en a contesté l'exactitude (1). Son raisonnement cependant conduit à cet intéressant corollaire que quatre couleurs ne suffisent pas pour colorier une carte tracée sur le tore et les surfaces du même genre.

Bien qu'une démonstration du théorème soit encore à donner, personne cependant n'est parvenu jusqu'à présent, à tracer une carte plane exigeant plus de 4 couleurs pour le coloriage, et il n'y a aucune raison de douter de l'exactitude de la proposition.

On s'est également occupé du nombre de manières dont une telle carte peut être coloriée avec 4 couleurs (2) mais les résultats obtenus ne sont pas suffisamment intéressants pour être mentionnés ici.

Configuration physique d'une contrée. — Puisque nous parlons des cartes géographiques, nous ferons remarquer ici que la théorie de la représentation de la configuration physique d'un pays au moyen de lignes tracées sur une carte a été discutée par Cayley et Clerk Maxwell (1). Ils ont établi qu'une certaine relation existe entre le nombre des montagnes, des vallées, des défilés ou gorges,

(1) Voir J. Petersen de Copenhague, *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. V, 1898, pp. 225-227; et vol. VI, 1899, pp. 36-38.

(2) Voir A.-C. Dixon, *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1902-1903, vol. XXXII, pp. 81-83.

(3) Cayley. — « Sur les courbes de niveau et les lignes de pente » *Philosophical Magazine* Londres, octobre 1859, série 4, vol. XVIII, pp. 264-268; *Collected Works* (œuvres), vol. IV, pp. 108-111.

J. Clerk Maxwell. — Sur « les Montagnes et les Vallées » *Philosophical Magazine*, décembre 1870, série 4, vol. XL, pp. 421-427; *Collected Works*, vol. II, pp. 233-240.

etc., etc., qui peuvent se trouver sur la surface d'un continent ou d'une île. Nous allons exposer sommairement les conclusions auxquelles ils sont arrivés.

Tous les points qui sont à la même hauteur au-dessus du niveau moyen de la mer sont dits de niveau. Sur une carte, le lieu de tous ces points est représenté par une ligne appelée *courbe de niveau*. Le contour d'une île est une ligne de niveau.

Il est d'usage de tracer les lignes de niveau sur une carte de telle sorte que la différence des hauteurs des points de chaque courbe soit constante d'une courbe à l'autre, il en résulte que plus les courbes paraissent rapprochées sur le plan, plus la pente du terrain est rapide ; mais en nous plaçant au point de vue dynamique, les hauteurs sont mesurées par le travail à effectuer pour passer d'une courbe à une autre et non par la distance linéaire qui les sépare en plan.

Une courbe de niveau est généralement fermée.

Considérons la courbe de niveau limitant une certaine région en élévation et supposons que deux pareilles régions aient un point commun, ce point est un point de rebroussement de la courbe de niveau sur elle-même (c'est à dire un point double réel, il constitue un *défilé* ou une *gorge*. Considérons en second lieu une courbe de niveau limitant une partie de terrain formant dépression et supposons que deux régions de cette nature aient un point commun. Ce point est encore un point de rebroussement de la courbe sur elle même et est appelé une *fourche* ou *bifurcation*. A mesure que les hauteurs des courbes de niveau augmentent, les surfaces planes limitées par ces courbes diminuent et, à la limite, elles se réduisent à des points qui sont des *sommets* de montagnes. De même à mesure que diminue la hauteur des courbes de niveau dans une région en dépression, le vide diminue, et, à la limite, se réduit sensiblement à un point qui est appelé le *fond* de la vallée considérée.

Les droites tracées normalement aux courbes de niveau sont les lignes de pente du terrain. En suivant une ligne de pente, nous

finissons généralement par atteindre le sommet d'une colline ou le fond d'une vallée suivant le sens de la marche; nous pouvons cependant, dans des cas particuliers, arriver à une gorge ou à une fourche. Les régions dans lesquelles toutes les lignes de pente aboutissent à un même point élevé forment des montagnes ou des collines : une région dans laquelle toutes les lignes de pente aboutissent à un même point bas est une vallée.

Enfin, les lignes de faîte ou de partage sont celles qui, de toutes les directions partant d'un point, ont le moins de pente, quand on considère le terrain de haut en bas ; les thalwegs sont les lignes de réunion des eaux.

Si $n + 1$ régions en élévation ou en dépression ont un même point commun, ce point est un point multiple de la courbe de niveau sur laquelle il se trouve; un tel point est appelé *gorge* ou *fourche* du n^{me} ordre et doit être considéré comme constitué par *n gorges* (ou fourches) différentes. Si une seule région en dépression en rencontre une autre en plusieurs points à la fois, l'un d'eux doit être regardé comme une *fourche* et les autres comme des *défilés*.

Ces quelques définitions topographiques données, nous pouvons aborder le sujet au point de vue géométrique.

Représentons par h le nombre de collines ou de montagnes qui existent sur un continent (ou une île), il y aura également h sommets; soit d le nombre des vallées, nous aurons aussi d fonds; soit p le nombre total des défilés, p_1 étant le nombre des défilés simples, p_2 celui des défilés doubles, et ainsi de suite: de même, désignons par f_1 le nombre total des fourches simples, f_2 celui des fourches doubles, f_3 celui des fourches triples, etc. ; soit enfin w le nombre des lignes de faîte et, par suite, celui des thalwegs.

En appliquant alors les théorèmes de Cauchy et d'Euler, on aura :

$$h = 1 + p_1 + 2p_2 + \dots$$
$$d = 1 + f_1 + 2f_2 + \dots$$

et

$$w = 2(p_1 + f_1) + 3(p_2 + f_2) + \dots$$

Jeux. — Abandonnant maintenant ces propositions purement géométriques, nous allons examiner quelques jeux ou récréations dépendant principalement de la position relative de certains objets, en renvoyant au chapitre sur la discussion de ces jeux, discussion qui n'exige pas une connaissance très sérieuse de l'arithmétique ou de l'algèbre. Quelques auteurs regardent les jeux de dames, du solitaire, des échecs et quelques autres de même nature, comme des sujets d'étude géométrique, de même qu'ils traitent les dominos, le trictrac et, d'une façon générale, tous les jeux se jouant avec des dés, comme des questions dépendant de l'arithmétique ou plutôt de l'algèbre; mais les discussions entraînent à faire trop de suppositions pour qu'elles puissent raisonnablement s'appliquer aux jeux tels qu'on les pratique ou pour être même intéressantes.

Les récréations que nous avons en vue ici sont des plus simples. Pour certaines, nous nous contenterons d'une citation en passant et nous pensons même que le lecteur qui ne recherche que des questions purement mathématiques pourra, sans inconvénient, négliger la fin de ce chapitre.

Jeux de situation (1). — Un grand nombre de jeux repose sur la géométrie de situation, nous n'en citerons que trois ou quatre.

Trois en ligne. — Nous pouvons mentionner, en premier lieu, le jeu des « Trois en ligne » dont les « zéros et les croix », forme particulière de la Marelle, et le Go-bang (2) nous offrent des exemples bien connus. Ces jeux se jouent sur une planchette ayant généra-

(1) M. Ball divise les jeux géométriques en *jeux de position statique* (*statical games of position*) et en *jeux de position dynamique* ou mieux *cinématique* (*dynamical games of position*). Ces dénominations rendent bien la pensée de l'auteur, mais nous avons hésité à les introduire, car elles ne sont pas usitées en France. Nous avons fait une distinction entre les jeux de situation et ceux de position.

(2) Voir plus loin.

lement la forme d'un carré divisé en n^2 petites cases. Le plus habituellement, voici comment on joue : l'un des joueurs place un jeton ou un pion blanc sur la case qu'il veut occuper, ou encore y fait une croix; son partenaire place également un jeton ou un pion noir, ou encore trace un zéro, sur la case qu'il désire retenir; et ainsi de suite. Celui qui le premier a disposé trois (ou un autre nombre assigné) jetons ou pions sur trois cases adjacentes en ligne droite a gagné la partie.

La théorie mathématique du jeu pour un carré comprenant neuf cases a été étudiée d'une façon complète et il n'est pas difficile de l'étendre à un jeu de 16 cases, mais l'analyse est longue et ne présente aucun intérêt particulier.

Plusieurs de ces jeux étaient connus des Anciens ([1]) et c'est uniquement pour cette raison que nous les mentionnons ici.

Extension donnée au jeu des trois en ligne. — Nous devons cependant dire quelques mots d'une élégante mais difficile généralisation de la question, qui, jusqu'ici, du moins aussi loin que nos recherches ont été poussées, n'a été examinée dans aucun recueil de *Récréations mathématiques*.

Le problème consiste à placer n jetons sur un plan de manière à former le plus grand nombre possible de lignes dont chacune ne contiendrait que trois jetons seulement ([2]).

Il est facile de disposer les jetons suivant un nombre de lignes égal à la partie entière de l'expression $\frac{1}{8}(n-1)^2$. La construction suivante nous en fournit le moyen.

P étant un point quelconque d'une cubique, soit Q le point où la courbe est encore coupée par la tangente en P, soit de même A le point où la tangente en Q rencontre la courbe. La droite PA

([1]) Becq de Fouquières. — *Les jeux des anciens*, seconde édition, Paris 1873, chap. xviii.

([2]) *Educational Times*, réédité, 1868, vol. VIII, p. 106; *ibid.* 1886, vol. XLV, pp. 127-128.

coupe la courbe en B, QB la coupe en C, PC en D, QD en E, et ainsi de suite. Les jetons doivent être disposés aux points P, Q, A, B... Ainsi, neuf jetons peuvent être disposés en huit lignes; dix jetons en dix lignes: quinze jetons en vingt-quatre lignes; quatre-vingt-un jetons en huit cents lignes; et ainsi de suite.

Si cependant P est un point multiple d'ordre n sur la cubique, Sylvester a démontré que la construction précédente donnait un nombre de lignes égal à la partie entière de l'expression $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)$. Ainsi, neuf jetons peuvent être arrangés en neuf lignes, ce qui constitue une récréation facile et bien connue; dix jetons en douze lignes; quinze jetons en trente lignes, et ainsi de suite.

Mais ces nombres mêmes donnent des limites inférieures et peuvent être dépassés : par exemple, Sylvester a établi que neuf jetons pouvaient être placés suivant dix lignes contenant chacune trois jetons. Nous ne savons pas comment il les dispose, mais voici un arrangement pouvant être adopté : on place les jetons aux points déterminés par les coordonnés (2,0), (2,2), (2,4), (4,0), (4,2), (4,4), (0,0), (3,2), (6,4); une autre disposition est donnée par les points (0,0), (0,2), (0,4), (2,1), (2,2), (2,3), (4,0), (4,2), (4,4).

Plus généralement, les sommets d'un hexagone régulier et les trois points d'intersection des côtés opposés forment un pareil groupe; par suite, une projection quelconque de cette figure nous donnera une solution.

Jusqu'à présent, il n'est pas possible de fixer le nombre maximum de lignes de trois jetons qui peuvent être formées avec n jetons disposés sur un plan.

Généralisation, p en ligne. — La question que nous venons d'examiner nous conduit naturellement à cette généralisation : disposer n jetons sur un plan, de manière à avoir le plus grand nombre de lignes possible, chacune ne contenant que p jetons seulement.

Les problèmes de cette nature peuvent souvent se résoudre immé-

diatement en supposant à l'infini les points d'intersection de certaines lignes suivant lesquelles les jetons sont distribués, puis en projetant, s'il est nécessaire, la figure ainsi formée, de manière à amener ces points à une distance finie. Nous avons donné quelques lignes plus haut un exemple d'une semblable solution.

Comme applications faciles, nous pouvons mentionner l'arrangement de 16 jetons suivant 13 lignes, contenant chacune 4 jetons, et l'arrangement de 19 jetons suivant 10 lignes contenant chacune 5 jetons. On obtient une solution de ce second problème en plaçant les jetons aux 19 points d'intersection des dix lignes définies par les équations.

$$x = \pm a, \quad x = \pm b, \quad y = \pm a, \quad y = \pm b, \quad y = \pm x :$$

deux de ces points sont à l'infini.

Nous abandonnons à nos lecteurs la recherche de la solution du premier problème.

Carrelage ou parquetage. — Une autre récréation connue sous le nom de carrelage, consiste à former des dessins géométriques ou des mosaïques avec des carreaux d'une certaine nature, c'est-à-dire marquetés ou de couleurs variées.

Pour ceux qui n'ont jamais examiné la question, il peut paraître singulier que des dessins formés en juxtaposant des carreaux de terre cuite, ou de toute autre nature (divisés par une diagonale en deux parties, l'une blanche et l'autre noire), soient un sujet d'étude pour l'analyse mathématique. Etant donnée la discussion qui a été présentée par Montucla (1), Lucas (2), et d'autres auteurs, il nous paraît nécessaire d'en faire l'objet d'un paragraphe spécial.

Les formes géométriques les plus simples et les plus régulières sont, en général, celles que l'on emploie avec le plus de succès pour

(1) Voir Ozanam. — Edition de 1803, vol. I, p. 100; édition de 1840, p. 46.

(2) Lucas. — *Récréations mathématiques*. Paris, 1882-3, vol II, part. 4 : nous aurons encore occasion de citer cet auteur un peu plus loin.

les matériaux destinés à entrer dans la constitution des édifices. Si l'on examine, par exemple, les différents carrelages qui se présentent le plus souvent dans l'intérieur des habitations, on y voit des triangles équilatéraux, des carrés, des hexagones et des octogones réguliers.

Les figures 10, 11 et 12, ci-après représentent respectivement des carrelages composés d'une seule espèce de carreaux, qui sont des triangles équilatéraux dans la première, des carrés dans la seconde, et des hexagones réguliers dans la troisième. Il est à remarquer que ces polygones réguliers sont les seuls que l'on puisse employer dans les carrelages où l'on ne veut pas combiner des figures dont les nombres de côtés ne soient pas les mêmes.

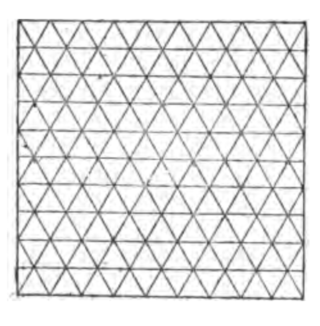


Fig. 10.

Représentons, en effet, par n le nombre des côtés d'un polygone

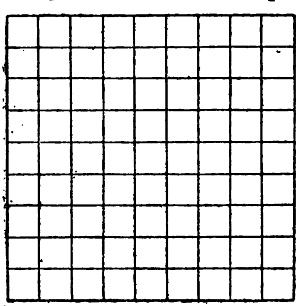


Fig. 11.

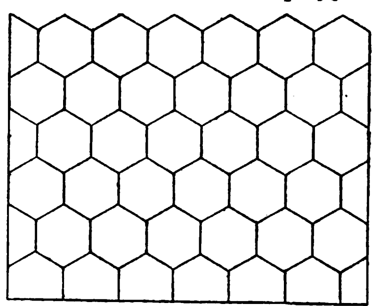


Fig. 12.

régulier; la somme de tous ses angles intérieurs est égale à $(n-2)\pi$ et chacun d'eux vaut

$$(1) \qquad \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Pour qu'il soit possible d'assembler un certain nombre de ces polygones autour d'un même point, il faut que l'expression (1) représente une partie aliquote de 4 angles droits, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2\pi}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{n-2}{n} = \frac{2}{p},$$

p représentant un nombre entier égal à 3 ou plus grand que 3.

Pour $p = 3$, $n = 6$,
et pour $p > 3$, on obtient l'inégalité $n < 6$. qui montre que le problème est impossible avec des polygones réguliers de 7 côtés ou de plus de 7 côtés.

Reprenons l'égalité

$$\frac{n-2}{n} = \frac{2}{p}.$$

Si n est impair, les deux nombres $n - 2$ et n étant premiers entre eux, la fraction du premier membre est irréductible et 2 ainsi que p sont des équi-multiples de $n - 2$ et de n.

Par suite

$$n - 2 = 1, \quad \text{d'où} \quad n = 3$$

et

$$p = n \times 2, \quad \text{d'où} \quad p = 6.$$

Si n est pair, nous pouvons poser $n = 2m$ et l'égalité devient

$$\frac{m-1}{m} = \frac{2}{p},$$

la fraction $\frac{m-1}{m}$ étant alors irréductible, on a :

$$m - 1 = 1, \quad \text{d'où} \quad m = 2 \quad \text{et} \quad n = 4$$
$$p = 2.m, \quad \text{d'où} \quad p = 4.$$

Bien plus, M. Lucien Lévy montre comme il suit [1] qu'un carrelage sans vides, ni empiètements, est impossible si l'on veut associer des polygones étoilés à des polygones convexes.

En d'autres termes, on ne peut faire un pavage avec la disposition ci-contre :

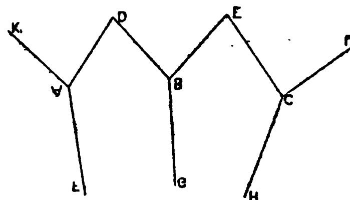


Fig. 13.

KABCL polygone étoilé.
FADBG polygone convexe.
GBECH »

En effet, soit n le nombre des côtés du polygone étoilé et p l'espèce.

L'angle du polygone

$$\alpha = \frac{(n - 2p)\,2}{n},$$

L'angle

$$\text{ADB} = \frac{(n - 2p + 2)\,2}{n},$$

L'angle

$$\text{DBG} = \frac{1}{2}\left[4 - \frac{(n - 2p)\,2}{n}\right].$$

Or, il faut

$$\text{ADB} = \text{DBG}, \quad \text{ou} \quad \frac{(n - 2p + 2)\,2}{n} = 2 - \frac{(n - 2p)}{n}$$

d'où

$$6p = n + 4.$$

Donc n doit être pair $= 2n'$

(1) L. Lévy. — Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. *Bulletin de la Société philomathique de Paris*. 8e série, t. III, n° 2, pp. 46.

et

$$3p = n' + 2.$$

Mais p est premier avec n, donc p est impair et n' est impair.

Or, soit N le nombre des côtés du polygone convexe : son angle sera

$$\frac{2N - 4}{N}$$

et il faut

$$\frac{2N - 4}{N} = \frac{2(n - 2p + 2)}{n} = \frac{4n' - 4p + 4}{2n'},$$

ou $$\frac{N - 2}{N} = \frac{n' - p + 1}{n'}, \quad 1 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{p - 1}{n'},$$

d'où $$(P - 1)N = 2n', \quad \text{et} \quad \frac{p - 1}{2} N = n'.$$

Donc N devrait être impair : mais pour qu'un polygone convexe puisse être entouré alternativement de polygones convexes et étoilés, il faut qu'il ait un nombre de côtés pair. Donc le problème est impossible.

Il est évident que si le polygone avait un côté traversant le triangle ABD, les angles formés extérieurement par ce côté et par AD et DB seraient plus grands que l'angle ADB : le problème serait impossible a fortiori.

Proposons-nous donc la question générale de recouvrir un plan avec des polygones réguliers convexes n'empiètant pas les uns sur les autres et de manière à ne laisser aucun vide, sans s'imposer la condition que les figures assemblées aient nécessairement le même nombre de côtés.

Le plus petit nombre possible de polygones pouvant être employés en chaque point d'assemblage est 3.

Représentons par n_1, n_2 et n_3 les nombres de côtés de ces trois figures, ces nombres étant supposés rangés par ordre de grandeur croissante;

Les angles au sommet de chacun des polygones ont respectivement pour valeurs

$$\frac{(n_1 - 2)\,2}{n_1}, \quad \frac{(n_2 - 2)\,2}{n_2} \quad \text{et} \quad \frac{(n_3 - 2)\,2}{n_3},$$

et on doit avoir

$$\frac{(n_1 - 2)\,2}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)\,2}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)\,2}{n_3} = 4,$$

ou

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \frac{n_3 - 2}{n_3} = 2,$$

d'où enfin la relation conditionnelle

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}. \quad \text{avec} \quad n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3.$$

Le plus simple des polygones réguliers étant le triangle équilatéral, posons $n_1 = 3$ et cherchons à déterminer les polygones pouvant être associés avec ce triangle.

On a alors

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

et

$$n_2 > 6 \quad \text{avec} \quad n_2 \leqslant 12.$$

Pour

$$n_2 = 7, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}, \quad n_3 = 42.$$

$$n_2 = 8, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}, \quad n_3 = 24.$$

$$n_2 = 9, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \quad n_3 = 18.$$

$$n_2 = 10, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}, \quad n_3 = 15.$$

$$n_2 = 11, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66}, \quad n_3 \text{ n'est pas entier.}$$

Enfin pour $n_2 = 12$, $n_3 = 12$.

La première combinaison : $n_1 = 3$, $n_2 = 7$ et $n_3 = 42$ ne permet pas de constituer un carrelage; car les trois angles réunis au 3[e] sommet du triangle équilatéral ayant respectivement pour valeurs $\frac{2}{3}$ de droit, $\frac{5.2}{7}$ et $\frac{5.2}{7}$ donneront une somme inférieure à 4 droits.

Il resterait donc un vide.

La deuxième combinaison :

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 8 \quad \text{et} \quad n_3 = 24$$

donne pour la somme des angles assemblés au 3[e] sommet du triangle équilatéral

$$\frac{2}{3} + \frac{12}{8} \times 2 = 2^d + \frac{2}{3},$$

somme inférieure à 4 droits.

Les 3[e] et 4[e] combinaisons ne sont pas davantage admissibles.

La seule combinaison possible est :

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 12, \quad n_3 = 12.$$

Assemblage du triangle équilatéral avec le dodécagone régulier; on obtient la figure représentée ci-contre.

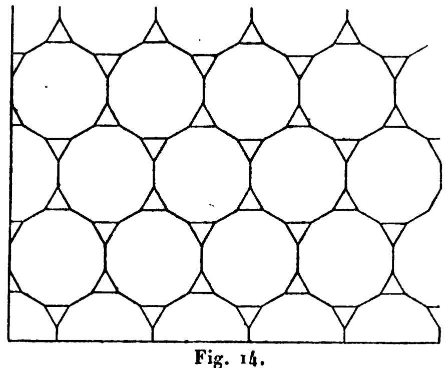


Fig. 14.

Examinons, en second lieu, le cas où $n_1 = 4$.

Alors

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

égalité qui combinée avec la relation $n_2 \leqslant n_3$ nous donne

$$4 < n_2 \leqslant 8.$$

Pour

$n_2 = 5,\quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20},\quad n_3 = 20$. assemblage inadmissible

$n_2 = 6,\quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},\quad n_3 = 12,$ »

$n_2 = 7.\quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28},\quad n_3$ n'est pas entier

$n_3 = 8,\quad \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8},\quad n_3 = 8$, seule combinaison possible.

On peut donc former un carrelage avec des carrés et des octogones et on obtient une figure identique à la suivante.

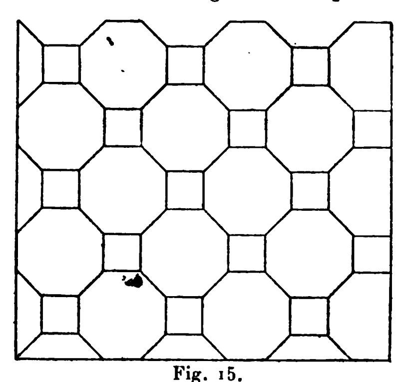


Fig. 15.

Supposons encore $n_1 = 5$, alors $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{10}$ et

$$5 \leqslant n_2 \leqslant 6.$$

Pour

$$n_2 = 5,$$

$$\frac{1}{n_3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

$$n_3 = 10.$$

Cette combinaison n'est pas admissible.

Enfin pour $n_2 = 6$, on trouve $n_3 = 6$.

Et la combinaison $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ fournit le carrelage déjà représenté plus haut, figure 12.

Ainsi avec 3 polygones réguliers ayant ou n'ayant pas le même nombre de côtés tous les trois, les seules combinaisons possibles sont

$$n_1 = 3,\quad n_2 = 12,\quad n_3 = 12,$$
$$n_1 = 4,\quad n_2 = 8,\quad n_3 = 8,$$
$$n_1 = 6,\quad n_2 = 6,\quad n_3 = 6.$$

Passons maintenant au cas de quatre polygones réguliers dont nous représentons les nombres des côtés, rangés par ordre de grandeur croissante, par n_1, n_2, n_3 et n_4,

On doit avoir en chaque sommet d'assemblage

$$\frac{(n_1 - 2)\,2}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)\,2}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)\,2}{n_3} + \frac{(n_4 - 2)\,2}{n_4} = 4,$$

d'où la relation

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

avec

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4.$$

Par suite $n_1 \leqslant 4$.

Pour

$$n_1 = 3; \qquad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3}.$$

Faisons $n_2 = 3$. On en déduit : $\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3}$

$$3 < n_3 \leqslant 6.$$

Si

$$n_2 = 4, \qquad \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \qquad n_4 = 12,$$

si

$$n_3 = 5, \qquad \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}, \qquad n_4 \text{ n'est pas entier},$$

si

$$n_2 = 6, \qquad \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \qquad n_4 = 6.$$

Ainsi, avec $n_1 = 3$ et $n_2 = 3$ on peut avoir

$$n_3 = 4, \qquad n_4 = 12,$$

ou

$$n_3 = 6, \quad n_4 = 6.$$

Faisons

$$n_2 = 4, \qquad \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}, \qquad 3 < n_3 < 5$$

et $n_3 = 4$, donne

$$\frac{1}{n_4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}, \qquad n_4 = 6.$$

Par suite, avec $n_1 = 3$ et $n_2 = 4$ on ne peut avoir que

$$n_3 = 4 \quad \text{et} \quad n_4 = 6.$$

Enfin pour $n_1 = 4$, les 4 polygones réguliers sont des carrés.

En résumé, avec 4 polygones réguliers nous avons les combinaisons

(1)	$n_1 = 3,$	$n_2 = 3,$	$n_3 = 4,$	$n_4 = 12,$
(2)	$n_1 = 3,$	$n_2 = 3,$	$n_3 = 6,$	$n_4 = 6,$
(3)	$n_1 = 3,$	$n_2 = 4,$	$n_3 = 4,$	$n_4 = 6,$
(4)	$n_1 = 4,$	$n_2 = n_3 = n_4 = 4.$		

La combinaison (1) ne permet pas de constituer un carrelage.

La combinaison (2) nous donne les figures 16 et 17 ci-après.

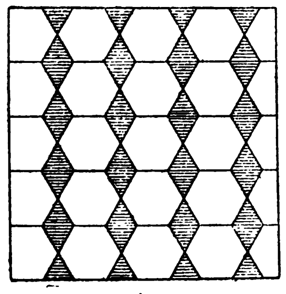


Fig. 16.

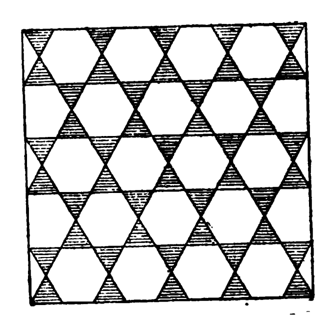


Fig. 17.

La combinaison (3) donne lieu à l'une des trois figures 18, 19 ou 20, au sujet desquelles L. Lévy [1] fait les remarques suivantes.

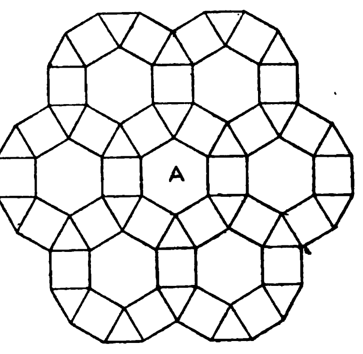


Fig. 18.

Dans l'assemblage régulier (fig. 18) tous les sommets sont identiques. Les assemblages des figures (19) et (20) conservent quelques propriétés de l'assemblage régulier. Ainsi on trouve dans les deux groupements des hexagones, un sur deux, dont les six axes de symétrie *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, *ee*, *ff* sont axes de symétrie des figures complètes. Les autres hexa-

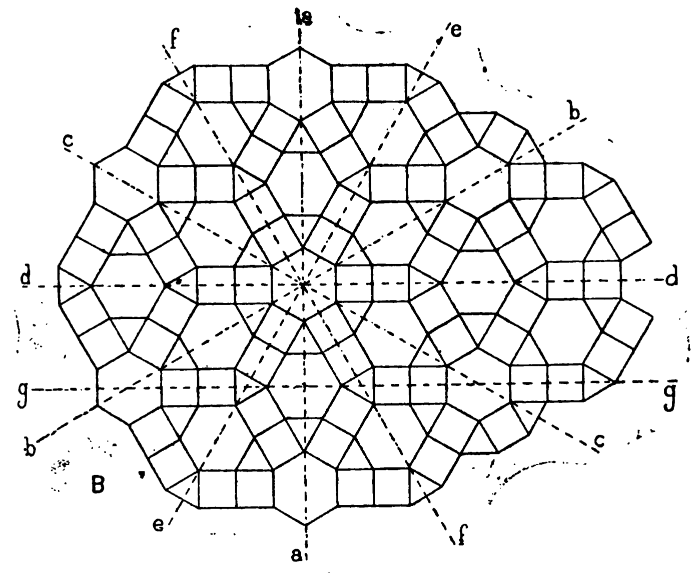


Fig. 19.

[1] Mémoire déjà cité.

gones n'ont en commun avec la figure totale, que quatre symétries dans l'une des figures, trois dans l'autre; dans la figure 19, un carré sur deux, dans la figure 20 un carré sur trois ont deux axes de symétrie communs avec la figure; ce sont les perpendiculaires au milieu des côtés. Il est d'ailleurs bon de remarquer que les diagonales des carrés ne sont axes de symétrie dans aucune

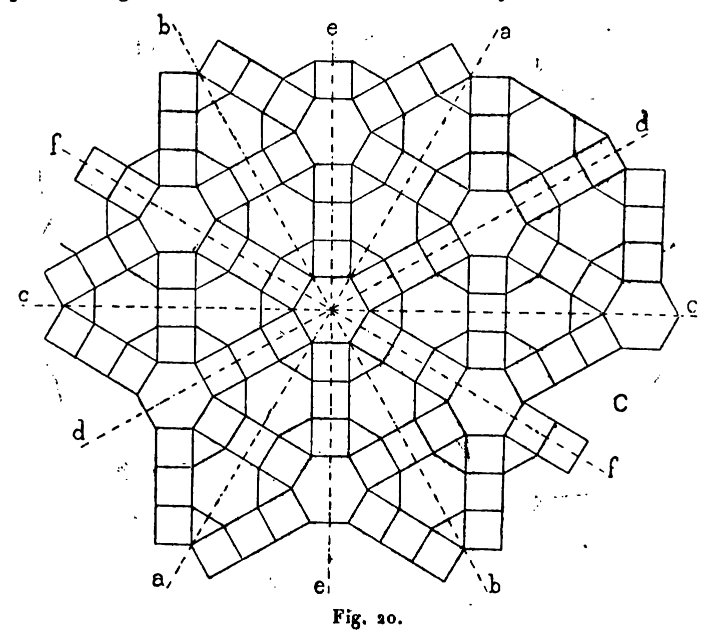


Fig. 20.

des trois figures. Dans la figure 19, un triangle équilatéral sur deux a ses trois axes de symétrie qui servent d'axes à la figure complète. L'autre triangle, comme tous les triangles de la figure 20 n'a qu'un axe de symétrie commun avec la figure.

On pourra ainsi, *avec les mêmes polygones*, obtenir autant de groupements que l'on voudra, et présentant des symétries de plus en plus rares. Mais il est évident que, pour le coup d'œil, lorsqu'on

aura à recouvrir un espace déterminé, on devra choisir un dessin qui reproduise la même disposition, un certain nombre de fois, sans cependant trop la répéter.

Par exemple, dans un espace restreint, on emploiera le pavage de la figure 18, si l'on dispose d'un peu plus de place, celui de la figure 20, puis celui de la figure 19, etc. Il est encore bon de remarquer qu'à cause des symétries multiples de ces figures, l'effet artistique sera entièrement différent suivant qu'on disposera parallèlement au côté de la pièce à paver une diagonale d'un hexagone ou la droite joignant les milieux de deux côtés opposés.

De nombreuses questions peuvent être posées à propos de ces assemblages : ainsi on peut se demander si le nombre en est illimité. Autant qu'il m'a semblé, la réponse doit être affirmative ; on peut se donner arbitrairement une file de ces polygones ayant leurs centres en ligne droite et il restera encore une infinité de manières de terminer le pavage. Voici cependant quelques précautions à prendre : on ne devra pas mettre à la suite, dans la file de polygones, plus de trois carrés, ni plus d'un triangle, ni plus d'un hexagone ; ces remarques sont faciles à vérifier. En voici encore une dont le lecteur trouvera sans peine la démonstration : considérons l'ensemble de polygones (fig. 21). Lorsqu'on rencontrera sur un axe de symétrie, le sommet A, commun à un hexagone et à un triangle, suivi lui-même d'un autre hexagone, tout l'ensemble (fig. 21) devra être dessiné.

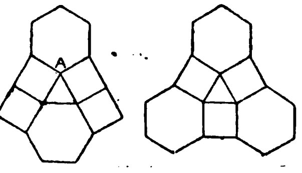


Fig. 21. Fig. 22.

D'ailleurs un triangle équilatéral ne peut être entouré que de l'ensemble (fig. 21) ou de l'ensemble (fig. 22) (¹).

Arrivons au cas de cinq polygones réguliers.

(¹) L. Lévy. — *Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. Bulletin de la Société philomatique de Paris.* 8ᵉ série, t. III, nº 2, p. 46.

n_1, n_2, n_3, n_4 et n_5 désignant toujours les nombres des côtés, on a :

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

avec

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5.$$

On ne peut avoir

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5$$

car il en résulterait

$$n_1 = \frac{10}{3}$$

valeur non entière.

Si $n_1 = 3$, alors

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$
$$3 \leqslant n_2 < 4$$

Supposons $n_2 = 3$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$3 \leqslant n_3 < 4$$

Si $n_3 = 3$

$$\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$
$$3 \leqslant n_4 \leqslant 4$$

Si on suppose encore $n_4 = 3$, il en résulte finalement $n_5 = 6$.

Si $n_4 = 4$, alors $n_5 = 4$.

Ainsi, avec cinq polygones réguliers, on a les deux solutions suivantes :

$n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n_4 = 4$, $n_5 = 4$ (fig. 23)

$n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n_4 = 3$, $n_5 = 6$

la première fournit les trois combinaisons représentées par les figures 23, 24, 25.

La seconde ne permet pas de constituer un carrelage.

Avec 6 polygones on arrive à la relation

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_6} = 2$$

avec

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \dots \leqslant n_6$$

et la seule solution possible est

$$n_1 = n_2 = \dots = n_6 = 3$$

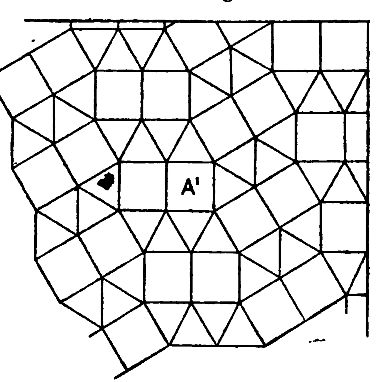


Fig. 23.

Tout ce qui précède donne l'idée d'une récréation des plus intéressantes et à la portée des enfants. Elle consiste à découper dans

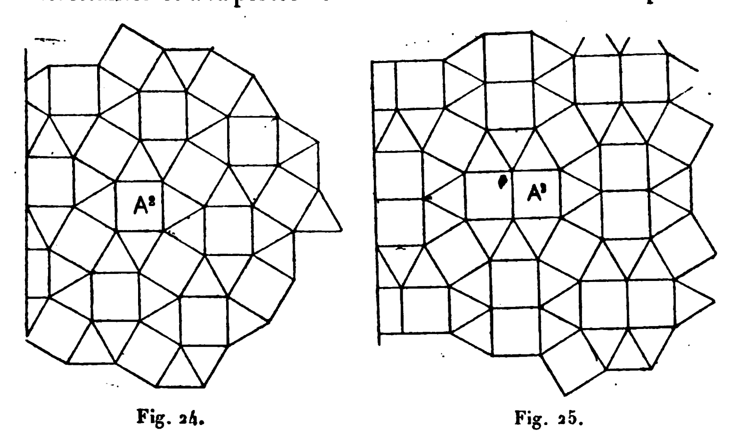


Fig. 24. Fig. 25.

des morceaux de carton blanc un certain nombre de polygones réguliers susceptibles de constituer un carrelage, ces figures une fois

teintées de diverses couleurs sont mélangées et il s'agit de les assembler de façon à former un carrelage.

On obtient ainsi des dessins variés dont quelques uns présentent beaucoup d'originalité et offrent de jolis sujets de décorations.

On obtient également des effets très agréables que les architectes pourraient avantageusement mettre à profit pour le carrelage des édifices publics et particuliers, en employant de simples combinaisons de carreaux partagés en deux triangles de couleurs différentes.

Le P. Sébastien Truchet, de l'ancienne Académie des Sciences; est le premier qui envisagea ce sujet sous le point de vue géométrique. Il raconte, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'année 1704, qu'étant allé faire un voyage au canal d'Orléans, il rencontra, dans un château voisin, des carreaux de faïence carrés et mi-partis de deux couleurs par une diagonale ; ils étaient destinés à carreler une chapelle et quelques appartements. Cela lui donna occasion d'examiner de combien de manières deux de ces carreaux pouvaient se joindre ensemble par le côté pour en former différents dessins.

On trouve d'abord, suivant la situation qu'un seul carreau peut prendre, quatre dessins différents (1, 2, 3, 4, fig. 26), qui néanmoins peuvent se réduire à deux, puisque le premier et le troisième, le second et le quatrième, ne diffèrent qu'en ce que les parties claires et ombrées sont transposées mutuellement.

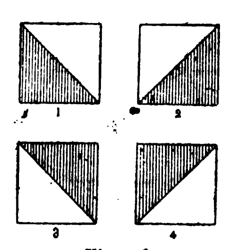


Fig. 26.

Maintenant, si l'on combine deux de ces carreaux ensemble, il en résultera 64 arrangements différents; car, sur chacun des quatre côtés d'un des carreaux représentés par les figures 26 ci-dessus, 1, 2, 3 et 4, on peut placer un quelconque des trois autres carreaux dans quatre positions différentes.

Il faut cependant observer que de ces 64 combinaisons il y en a précisément une moitié qui ne fait que répéter l'autre absolument dans le même sens, ce qui les réduit à 32. On les réduirait à 10 si l'on n'avait pas égard à la situation.

On pourrait combiner d'une manière analogue trois, quatre, cinq, etc. carreaux les uns avec les autres, on trouverait que 3 carreaux peuvent former entre eux $2^7 = 128$ dessins, que quatre en forment $2^8 = 4^4 = 256$, et que le nombre des dispositions distinctes renfermées dans un carré formé par 64 carreaux est égal à 2^{64} ou 18446744073709551616.

On trouve chez quelques tabletiers sous le nom de *jeu du parquet*, une petite table garnie d'un rebord et contenant 64 ou 100 petits carrés mi-partis, que l'on choisit parmi un plus grand nombre, de manière à établir des combinaisons agréables à l'œil. Les personnes curieuses de cet amusement, en verront de très nombreuses dans le Mémoire cité du P. Truchet, et surtout dans un traité spécial sur la matière, publié en 1722 par le P. Douat, confrère du P. Truchet, sous le titre : *Méthode pour faire une infinité de dessins différents avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale.*

Carrelages analagmatiques. — Sylvester (¹) a étudié tout spécialement des assemblages particuliers de carreaux blancs et noirs auxquels il a donné le nom de *carrés anallagmatiques*.

Un tel carré est formé de cases noires et blanches, en nombre égal ou inégal, mais disposées de telle sorte que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre des variations de couleurs soit toujours égal au nombre des permanences.

La figure 27 est un carré anallagmatique de 16 cases.

Considérons le carré anallagmatique de 4 cases représenté ci-contre (fig. 28) et remplaçons les cases noires par des cases blanches et inversement, on obtient un nouveau carré (fig. 29) qui est l'*opposé* ou le *complémentaire* du premier.

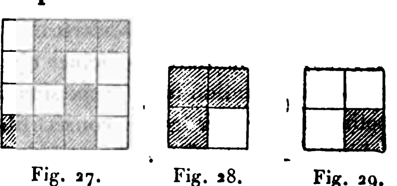


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

(¹) Voir l'*Educational Times reprints*, Londres 1868, vol. X, pp. 74, 76, 112 ; voir aussi vol. XLV, p. 127 ; vol. LVI, pp. 97-99

Laisant a donné le procédé suivant pour construire les carrés anallagmatiques de 2^n cases de côté (¹).

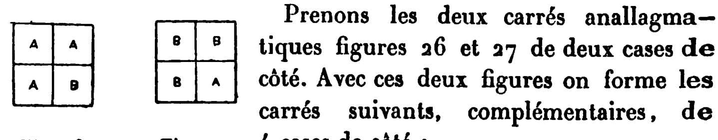


Fig. 28. Fig. 29.

Prenons les deux carrés anallagmatiques figures 26 et 27 de deux cases de côté. Avec ces deux figures on forme les carrés suivants, complémentaires, de 4 cases de côté :

c'est-à-dire

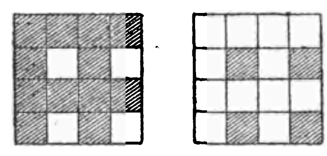


Fig. 30.

Si, dans la figure précédente, on remplace A et B par les carrés que nous venons d'obtenir, on obtient les carrés *complémentaires* de 8 cases de côté ; et, ainsi de suite. D'ailleurs il est évident que l'on peut déduire d'un carré anallagmatique un grand nombre d'autres : 1° par la permutation des colonnes et des lignes ; 2° par le changement des couleurs des cases d'une ligne ou d'une colonne quelconque.

L'idée du carré anallagmatique a été déduite par Sylvester de la démonstration qu'il a donnée, le premier, d'un théorème énoncé par Newton, dans l'*Arithmétique universelle*.

Préférable à celui de Descartes, ce théorème fournit une limite supérieure du nombre des racines réelles d'une équation numérique par la considération de la succession des signes dans l'ensemble des coefficients de *trois* termes consécutifs.

Au Congrès du Havre (*Association française*, 1877) Lucas a fait remarquer l'analogie qui existe entre le *carré anallagmatique* de Sylvester, et les formules qui donnent la décomposition du produit

(¹) Laisant. — Notice historique sur les travaux des sections de mathématiques. *Association française pour l'avancement des Sciences*. Compte rendu de la 8ᵉ session, Montpellier, 1879.

de sommes de 4, 8, 16, ... carrés, en une somme de 4, 8, 16, ... carrés. On sait que cette formule a été donnée par Léonard de Pise pour 2 carrés, par Euler pour 4, par Prouhet et Cayley pour 8 et par Genocchi pour 2^n carrés.

Par exemple, en remplaçant les cases blanches du carré anallagmatique de 4 cases de côté représenté fig. 27, plus haut, par le signe + et les cases noires par le signe —, on forme le tableau

$$\begin{matrix} + & - & - & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ - & - & - & + \end{matrix}$$

que l'on retrouve dans le produit de

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

par

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

mis sous la forme suivante d'une somme de 4 carrés

$$\begin{matrix} (+ ap - bq - cr - ds)^2 \\ (+ as - br + cq + dp)^2 \\ (+ aq + bp - cs + dr)^2 \\ (- ar - bs - cp + dq)^2 \end{matrix}$$

Nous conseillons au lecteur de rechercher les figures des carrés anallagmatiques de 64 cases et de 256 cases.

Il existe un pavage anallagmatique de ce genre, en marbre blanc et rose, dans l'une des cours d'un établissement public de Londres.

Les difficultés du problème augmentent si l'on emploie des carreaux de plus de deux couleurs. Comme simple exemple de ce genre de question, nous mentionnerons la récréation suivante dont nous devons la communication à l'obligeance d'un correspondant qui lui donne le nom de « jeu de la croix en quatre » (Cross-fours). On

se sert de seize jetons carrés, dont la moitié supérieure de chacun d'eux est respectivement jaune, rouge, rose ou bleue, et la moitié inférieure dorée, verte, noire ou blanche, mais deux jetons ne sont pas coloriés de la même façon ; il s'agit de disposer ces jetons en carré de telle sorte qu'il y ait huit couleurs seulement dans chaque ligne horizontale, dans chaque colonne verticale et dans chaque diagonale. Les jetons peuvent également être arrangés de façon que chacune de ces dix directions [1] ne contienne que six couleurs seulement, ou encore cinq couleurs ou enfin quatre couleurs. Les questions de cette nature sont peu connues, elles sont cependant assez instructives.

Problème du cube colorié. — Comme un nouvel exemple de récréation analogue à celle du carrelage, nous citerons le problème du cube colorié ; nous le choisissons de préférence d'abord, parce qu'il présente quelques difficultés, ensuite, et principalement parce qu'il a été soumis à l'analyse mathématique [2].

Abstraction faite de toutes notions spéciales de mathématiques, la question se résume ainsi : les six faces d'un cube sont peintes avec six couleurs différentes, et en permutant l'ordre de ces couleurs on peut obtenir trente cubes dont deux quelconques ne sont pas coloriés de la même manière. Considérons l'un deux que nous représenterons par la lettre K, le problème consiste à choisir huit cubes parmi les vingt-neuf qui restent, avec lesquels on se propose de construire un nouveau cube (dont les dimensions linéaires seront doubles de celles de K) colorié comme K, les petits cubes élémentaires étant disposés de telle sorte que les faces en contact de deux d'entre eux soient de la même couleur.

Il n'existe qu'une seule collection de huit cubes satisfaisant à la question, mais il ne s'agit pas de les déterminer d'une façon empi-

(1) Les ligne horizontales, les colonnes verticales et les deux diagonales.

(2) Par le Major Mac Mahon ; un extrait de son Mémoire présenté à la Société mathématique de Londres, le 9 février 1893, a été donné dans le nº du 23 février 1893, du journal *Nature* vol. XLVII, p. 406.

rique. L'analyse mathématique nous fournit la règle suivante pour les obtenir sans tâtonnements.

Considérons une face quelconque du cube K, aux quatre angles de cette surface se rencontrent trois couleurs ; en effectuant sur ces couleurs considérées comme des nombres une permutation circulaire, nous obtenons avec chaque angle deux cubes différents et les huit cubes ainsi déterminés répondent à la question.

Supposons, par exemple, que les six couleurs soient représentées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Plaçons le cube K sur une table et, pour fixer les idées, admettons que la face coloriée *f* soit la face inférieure, celle coloriée *a* la face supérieure, et que les autres couleurs *b*, *c*, *d* et *e* soient orientées suivant les directions Est, Nord, Ouest et Sud.

Nous représenterons une pareille disposition par la notation (*f*, *a* ; *b.c.d.e*). Une permutation circulaire des couleurs qui se rencontrent à l'angle N-E de la face supérieure nous donne le cube (*f*, *c* ; *a.b.d.e*). De même, les deux permutations circulaires des couleurs qui se rencontrent à l'angle N-O de la face supérieure du cube K, nous donnent les cubes (*f*, *d* ; *b.a.c.e*) et (*f*, *c* ; *b.d.a.e.*). L'angle S-O de la face supérieure du cube K nous fournit les deux nouveaux cubes (*f*, *e* ; *b.c.a.d*) et (*f*, *d* ; *b.c.e.a*) ; et enfin, avec les couleurs de l'angle S-E, nous formons les deux derniers cubes (*f*, *e* ; *a.c.d.b*), (*f*, *b* ; *e.c.d.a*).

Les huit cubes cherchés étant ainsi obtenus, il n'est pas difficile de les disposer de façon à former un nouveau cube colorié comme K et remplissant cette condition que deux faces en contact soient de la même couleur. Ces conditions peuvent être satisfaites au moyen de deux arrangements différents. Voici une façon d'opérer : donnons un numéro d'ordre aux divers cubes décrits plus haut, et plaçons les nos 3, 6, 8 et 2 aux sommets S-E, N-E, N-O et S-O d'un carré, la face coloriée *f* étant, bien entendu, à la partie inférieure, les cubes 3 et 6 ayant les faces coloriées *b* tournées vers l'E et les cubes 2, 8 tournant vers l'O, les faces coloriées *d*. Les nos 7, 1, 4 et 5 seront alors placés au-dessus des premiers, respectivement

dans les angles S-E, N-E, N-O et S-O, les faces coloriées *a* étant, bien entendu, toutes à la partie supérieure; les cubes 7 et 1 ayant les faces coloriées *b* tournées vers l'E et les faces coloriées *d* des cubes 5 et 4 regardant l'O.

Si on ne se donne pas au préalable le cube K, il devient alors bien difficile, sans le secours de l'analyse mathématique, de disposer les huit cubes élémentaires de manière à former un seul cube dont les faces soient coloriées comme celles d'un des vingt-deux cubes restants avec cette condition que les faces en contact dans deux petits cubes soient de la même coulenr.

Il est bien facile de construire un jeu semblable, ayant des dimensions raisonnables, il est même surprenant qu'on n'en trouve pas chez les marchands de jouets, mais nous n'en avons jamais vu d'autre que celui que nous avons construit pour notre usage.

Nous ne croyons pas sortir du cadre que nous nous sommes tracé en exposant ici un joli problème sur la sphère traité par A. Hermann dans une publication aujourd'hui oubliée (*Journal des sciences mathématiques* publié par Labosne).

Voici le problème en question :

Quels sont les polygones réguliers sphériques que l'on peut employer pour recouvrir la sphère en n'utilisant que des polygones égaux entre eux, associés en même nombre autour d'un sommet quelconque de l'un des polygones ?

Rappelons d'abord ce théorème important qui est dû à Euler.

Théorème d'Euler. — *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de deux est égal au nombre des faces augmenté du nombre des sommets.*

Autrement dit, si on appelle S le nombre des sommets, A le nombre des arêtes, F le nombre des faces, on a :

$$S + F = A + 2.$$

Considérons un point quelconque à l'intérieur du polyèdre. De ce point comme centre décrivons une sphère. Les droites qui joignent

le point choisi aux sommets du polyèdre percent la sphère en différents points que nous joindrons par des arcs de grand cercle. Ces arcs de grand cercle détermineront sur la sphère des polygones sphériques correspondant aux différentes faces du polyèdre et dont l'ensemble recouvre la surface de la sphère. Soit ABCDE l'un de ces polygones et soit n le nombre de ses côtés, sa surface aura pour expression

$$S - 2(n - 2) = S - 2n + 4 \text{ (1)},$$

S représentant la somme de ses angles. Si nous faisons la somme des surfaces de ces polygones, nous trouverons la surface de la sphère, qui est égale à 8. D'un autre côté, la somme des angles des polygones est égale à 4 S, puisque la somme des angles des polygones qui s'ajustent autour d'un même point est égale à 4 droits et qu'il y a sur la sphère autant de sommets que dans le polyèdre ; de plus on a :

$$\Sigma n = 2\text{A}, \quad \Sigma 4 = 4\text{F}$$

par conséquent on a l'égalité

$$8 = 4\text{S} - 4\text{A} + 4\text{F}$$

ou

$$\text{S} + \text{F} = \text{A} + 2.$$

Passons maintenant à la solution du problème énoncé.

Soient :

n le nombre des côtés d'un polygone :

K le nombre des polygones associés autour d'un même sommet ;

m le nombre des polygones ;

A l'angle de l'un des polygones.

La surface du polygone sphérique étant contenue m fois dans la surface de la sphère, nous aurons la relation

$$\frac{n.\text{A} - 2(n^d - 2^d)}{1^d} = \frac{8}{m},$$

(1) L'unité de surface est comme l'on sait le *triangle sphérique trirectangle*.

égalité d'où nous déduisons

$$m = \frac{8^d}{n(A - 2^d) + 4^d};$$

or nous avons

$$\frac{A}{1^d} = \frac{4}{K}$$

donc

$$(1) \qquad m = \frac{4K}{2(n + K) - Kn}.$$

Examinons maintenant ce que devient cette formule pour les hypothèses diverses que l'on peut faire sur la nature du polygone. Si nous nous servons de triangles équilatéraux, nous aurons :

$$n = 3.$$

La formule (1) nous donne

$$m = \frac{4K}{6 - K}$$

m devant être un nombre entier, on ne peut donner à K que les valeurs 3, 4 et 5 auxquelles correspondront pour m les valeurs

$$m = 4, \quad m = 8, \quad m = 20.$$

Pour $n = 4$, on a :

$$m = \frac{2K}{4 - K}$$

et on ne peut donner à K que la valeur 3, ce qui donne

$$m = 6.$$

Pour $n = 5$ la formule (1) devient

$$m = \frac{4K}{10 - 3K},$$

et on ne peut encore donner à K que la valeur 3 qui nous conduit à

$$m = 12.$$

Pour $n = 6$ la formule (1) devient

$$m = \frac{K}{3 - K}$$

et on ne peut donner à K aucune valeur ; il en est a *fortiori* de même pour $n > 6$.

« Ainsi, on ne peut recouvrir que de 5 manières la sphère de polygones réguliers égaux, assemblés en même nombre autour d'un même sommet ».

Première remarque. — On sait qu'il existe 5 polyèdres réguliers : si on considère un polyèdre régulier inscrit dans une sphère, et si on joint les sommets consécutifs 2 à 2 par des arcs de grand cercle, nous diviserons la sphère en polygones réguliers égaux. On voit donc que les 5 manières de diviser la sphère en polygones réguliers égaux correspondent aux cinq polyèdres réguliers de la géométrie, et qu'il n'y en a pas d'autres.

Deuxième remarque. — On pourrait croire qu'en n'assujettissant pas les polygones à être réguliers et égaux entre eux, on pourrait disposer d'un plus grand nombre de manières des polygones d'un même nombre de côtés. Il n'en est rien. Pourvu que l'on s'assujettisse toujours à associer les polygones en même nombre autour d'un même sommet, que les polygones soient réguliers ou non, qu'ils soient égaux ou non, la formule (1) et ses conséquences ont toujours lieu. Il suffit pour établir la formule (1) dans toute sa généralité, de remarquer que le théorème d'Euler s'applique à la sphère considérée comme un polyèdre à faces courbes dont les faces sont les polygones sphériques qui la recouvrent. De sorte que si nous désignons par S le nombre des sommets de ce polyèdre, par A le nombre de ses arêtes, nous avons la relation

$$(\alpha) \qquad S + m = A + 2,$$

le nombre des faces étant m, si nous conservons la même notation que tout à l'heure. Mais n et K désignant encore le nombre des côtés d'un polygone sphérique et le nombre des polygones associés autour d'un même sommet, nous avons

$$S = \frac{nm}{K}, \quad A = \frac{nm}{2};$$

substituant dans (α), nous retomberons sur la formule (1).

Toutefois, s'il est démontré qu'il est impossible de recouvrir la sphère avec des hexagones inégaux, par exemple, et que si on se sert de pentagones, il faut les associer 3 à 3, il resterait à examiner si on peut prendre un premier pentagone au hasard, et le degré d'indétermination que présente la solution du problème, ce premier pentagone une fois choisi. Mais ce sont là des questions fort délicates qui sortent des limites que nous nous sommes imposées. Nous tenions simplement à montrer que la solution générale du problème n'est pas trouvée quand on a interprété les conséquences de la formule (1).

Jeux de position. — Les jeux qui dépendent des mouvements que l'on peut faire exécuter à des pièces sur des tablettes de formes variées — comme la marelle simple, double, triple, le jeu du renard et de l'oie, le jeu du solitaire, le trictrac, le jeu de dames et les échecs — présentent généralement beaucoup d'intérêt. Le cadre de cet ouvrage ne nous permet pas d'entrer dans la description et l'étude de tous ces jeux que l'on trouve d'ailleurs dans des traités spéciaux, nous nous contenterons de dire quelques mots de l'un d'eux, le Go-bang ou Gobang dont il a été question un peu plus haut et que nous croyons encore peu connu.

Le Go-bang ou dames japonaises. — Ce jeu de combinaisons serait, paraît-il, connu au Japon depuis la plus haute antiquité et aurait été introduit en Europe par un amateur anglais nommé Cremer.

On peut se le procurer, à Paris, à la *Neal's library*, rue de Rivoli, 246, avec une notice anglaise, ou encore dans les grands bazars parisiens accompagné de la règle du jeu en français. Il se joue avec un nombre *quelconqae* de jetons, sur un carton divisé en un nombre *quelconque* de cases. Les cartons qui accompagnent le jeu, à la librairie anglaise, contiennent soit $16^2 = 256$ cases, soit $18^2 = 324$ cases, soit $20^2 = 400$ cases.

Les jeux français contiennent, dans une boîte, un échiquier en carton, plié en 4, de 400 cases, et 4 séries de couleurs différentes, de 50 jetons chacune (parfois un de plus ou de moins) (1).

La règle du jeu est très simple : le plateau étant divisé en un certain nombre de carrés, les joueurs adoptent chacun une couleur et prennent un nombre égal de jetons.

Chacun d'eux joue alternativement un pion ; le hasard décide de celui qui a le premier la pose. Les pions se posent comme on veut, sur n'importe quelle case. La partie est gagnée par le premier des joueurs qui a réussi à placer 5 pions en ligne droite dans une direction quelconque, de manière que ces 5 pions soient dans des cases qui se touchent, sans vide et sans intercalation des pions de l'adversaire.

S'il arrive que chacun des adversaires a placé ses pions sans que la partie soit gagnée, on la continue, en jouant alternativement un pion quelconque à son propre choix et en le déplaçant seulement d'une case dans chaque sens, comme le roi aux échecs. La partie est gagnée dans les mêmes conditions, c'est-à-dire quand un des adversaires a amené, par des déplacements successifs, 5 pions consécutifs dans le même alignement. Cette phase de la partie est fort intéressante et se prête à de multiples combinaisons.

Dans la pratique, lorsqu'on joue le Go-bang à deux, il est rare, à moins qu'on ait fait une étude très attentive de ce jeu, qu'on

(1) On peut construire soi-même un jeu de Go-bang avec du papier quadrillé et des pains à cacheter.

arrive à placer chacun plus de 25 jetons avant la fin de la partie, et qu'on atteigne les bords de l'échiquier, car il y a évidemment avantage à se placer au centre ; c'est pourquoi le nombre des cases de l'échiquier et des jetons de chaque joueur n'a aucune importance, et l'essai qu'on peut faire de ce jeu, avec un damier de 100 cases trop restreint, ne donne qu'une idée incomplète de la variété de ses combinaisons.

Il est facile de voir que celui qui joue le premier peut toujours placer 3 jetons consécutifs en ligne droite au troisième coup, et qu'il ne faut qu'un très petit nombre de coups joués correctement pour en placer 4 à la file sur une ligne droite parallèle à l'un des bords de l'échiquier ou à l'une de ses diagonales. Pour cinq pions consécutifs, si l'adversaire joue correctement, il en faut beaucoup plus, peut-être 30 ou 40, ou même davantage.

Pour gagner au $n^{\text{ième}}$ coup du jeu du Go-bang, il suffit de placer 4 jetons de même couleur au $(n - 2)^{\text{ième}}$ coup sur 4 cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de cette ligne étant libres. Pour arriver à ce dernier résultat, il suffit de placer au $(n - 4)^{\text{ième}}$ coup, un jeton qui forme, dans deux directions différentes, deux séries de trois jetons de même couleur sur trois cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de ces deux lignes étant libres ; il y a d'autres dispositions qui assurent le gain de la partie.

Il serait intéressant de chercher combien il y a de diagrammes ou types différents de dispositions des jetons d'une même couleur, qui assurent le gain de la partie, et quel est le nombre de coups *minimum* nécessaire pour réaliser chacun de ces types sur l'échiquier, quel que soit le jeu de l'adversaire, le nombre des cases et des jetons étant supposé illimité ?

La question a été posée par H. Tarry dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (Tome II, 1895, p. 320) et est restée jusqu'ici; croyons nous, sans réponse.

Si on limite le nombre des cases ou des jetons, la question présente, en dehors du cas général, des complications qui rendent inap-

plicables à un échiquier carré les formules applicables à un échiquier à deux bords (au lieu de 4), dans le problème des *n* reines ([1]).

Bien que le Go-Bang paraisse à première vue d'une simplicité enfantine, et que le gain de la partie semble dû au hasard pour les commençants, il est très curieux, parce qu'il exige une extrême attention lorsque le nombre de pions placés est considérable ; il est encore plus difficile qu'au jeu des échecs, de jouer sans faute le coup correct. Aussi tout en étant beaucoup moins sérieux que le jeu des échecs, il est bien plus animé que le jeu de dames, et a d'ailleurs sur eux l'avantage qu'il peut s'apprendre en quelques minutes et que les parties sont courtes. Il n'est pas rare en effet, lorsqu'on joue avec un adversaire inexpérimenté, de gagner avant le dixième coup.

Ce jeu mérite donc toute l'attention des amateurs de la géométrie de l'échiquier ; très simple de matériel et de mécanisme, ce qui est un grand mérite, il est aussi amusant que profond, subtil et varié.

Le Go-bang a reçu plusieurs modifications : voici par exemple, une manière assez ingénieuse de le jouer sur un damier de n^2 cases et en supposant deux joueurs ayant chacun $\frac{1}{2}n^2$ pions.

Chaque adversaire pose à son tour un pion en se donnant pour but d'envelopper complètement un pion adverse ; le pion enveloppé est enlevé du jeu ; la victoire appartient à celui des deux joueurs qui a fait le plus de prises pendant le temps qu'il a fallu pour poser tous les pions sur le damier.

D'une façon générale les mouvements autorisés ou conventionnels des pièces dans les divers jeux rappelés un peu plus haut sont si nombreux que l'analyse mathématique du jeu devient réellement trop ardue pour être traitée d'une façon complète.

Bien que cela paraisse évident à beaucoup de nos lecteurs, nous ferons encore mieux ressortir l'impossibilité de discuter ces jeux d'une façon pratique en ajoutant qu'on a prouvé que le jeu des échecs comportait 197 299 manières différentes de jouer les quatre

([1]) Voir LUCAS, *Récréations mathématiques*, t. I.

premiers coups et qu'on comptait presque 72 000 dispositions différentes des pièces sur l'échiquier, le quatrième coup une fois joué (deux de chaque côté), dont 16556 sont données par le mouvement des pions seulement (1).

Les jeux dans lesquels les mouvements conventionnels des pièces sont très limités, sont susceptibles d'une étude mathématique. Nous en donnerons un ou deux exemples dans le chapitre suivant, nous contentant pour le moment de décrire quelques récréations et de simples amusements.

Problème du garage. — Nous mentionnerons tout d'abord une petite question que nous avons eu occasion d'acheter, il y a quelques années et qui était connue sous le nom de « question du garage ». C'est une récréation pouvant être considérée comme le type de plusieurs problèmes basés sur le croisement des trains et, bien qu'elle repose sur une hypothèse peu admissible, nous la donnons ici comme spécimen.

Le jeu consiste en une portion de voie ferrée DEF, se raccordant en D et F avec deux voies en courbe DBA, FCA, se croisant en A.

La portion de voie en A qui est commune aux deux courbes présente le développement strictement nécessaire pour donner passage à un simple wagon comme P ou Q, mais non à la machine R. Par suite, si cette machine s'engage sur l'une des courbes, elle ne peut en sortir qu'en revenant sur elle-même en sens contraire.

Des petits rectangles de bois coloriés de façon à simuler des wagons sont disposés en P et Q, comme le montre la figure 31, et un rectangle de bois un peu plus grand représentant la machine est placé en R. Le jeu consiste à intervertir la position des deux wagons en se servant de la machine.

(1) L'*Intermédiaire des mathématiciens*, Paris, décembre 1903, vol. X, pp. 305-308.

Voir aussi *Royal Engineers Journal*, Londres, août-novembre, 1889, ou encore *British Association Transactions*, 1890, p. 745.

L'opération peut s'effectuer ainsi :

(1) La machine R pousse le wagon P en A;

(2) Elle revient, s'engage sur la seconde courbe et pousse le wagon Q jusqu'à tamponner le wagon P déjà en A. On accouple alors Q et P, et la machine les amène sur la voie rectiligne, puis, marchant en sens contraire, elle les conduit en E.

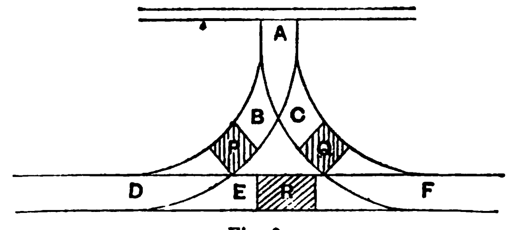


Fig. 31.

(3) On détache le wagon P, la machine ramène le wagon Q en A et l'abandonne dans cette position.

(4) La machine R revient chercher le wagon P et l'amène sur la voie en courbe FCA dans la position occupée primitivement par Q, puis elle se détache.

(5) R revient alors sur la voie droite, s'engage sur la seconde courbe, prend le wagon Q, l'amène dans la position occupée primitivement par P et l'abandonne [1].

Voici encore un jeu à peu près du même genre qui se vendait dans les rues de Londres en 1905.

Une voie d'évitement BGE se raccorde en B et E avec une voie principale AF qui est supposée fermée aux deux extrémités A et F. Sur ces deux voies se déplacent 8 wagons et une machine de mêmes dimensions que les wagons. Au début du jeu les 8 wagons numérotés de 1 à 8 se trouvent sur la voie principale de A en F, dans

[1] La même récréation peut se présenter en supposant que les deux voies en courbe viennent aboutir à une plaque tournante d'un diamètre suffisant pour permettre la manœuvre d'un wagon, mais trop petit pour la machine.

l'ordre naturel 1, 2, 3, 4, ... 8. La machine stationne sur la voie d'évitement. Les distances égales AB, EF sont telles qu'il est possible d'y loger 2 wagons seulement quand les branchements B, E, aux extrémités de la voie d'évitement sont dégagés, cette voie peut recevoir 4 wagons et seulement 4. Il n'est pas possible de loger plus de 8 wagons sur la voie AF.

Quand la rame entière des 8 wagons est sur AF, seul l'avant dernier wagon à chaque extrémité peut être déplacé et amené sur la voie d'évitement; quand il y a moins de 8 wagons sur la voie principale AF, les deux derniers véhicules, à chaque extrémité, peuvent être amenés sur la voie BGE.

Cela posé, le jeu consiste à déplacer les wagons sur la voie principale de manière à les disposer dans l'ordre inverse 8, 7, 6 ..., 1 de A en F en effectuant le plus petit nombre possible de déplacements de la machine ou d'un wagon de la voie principale à la voie d'évitement et inversement.

Il n'est pas difficile avec les indications qui précèdent de construire soi même un petit modèle pour étudier la question.

Celui que nous avons pu nous procurer et qui est représenté par la figure 32 ci-après, présentait les dimensions suivantes :

$$AF = 0{,}225, \quad AB = EF = 0{,}046$$
$$AH = FK = BC = DE = 0{,}005.$$

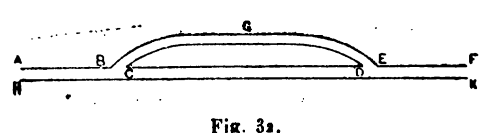


Fig. 32.

Les petits véhicules mesuraient 0,025 de long sur 0,005 de large.

On trouve bien d'autres questions sur les garages, mais ces deux exemples suffiront pensons nous.

Problème du bateau. — Tout le monde connaît l'histoire de cet homme qui, voyageant avec un loup, une chèvre et un panier de choux arrive sur le bord d'une rivière dont il ne peut effectuer la traversée qu'au moyen d'un petit bateau juste assez grand pour y

introduire avec lui l'un des deux animaux ou le panier de choux. Comme, pour des raisons faciles à comprendre, il ne lui est pas possible de laisser le loup seul avec la chèvre, ou la chèvre seule avec ses choux, on demande comment il va s'y prendre pour passer la rivière (1).

Un problème semblable présenté par Alcuin, Tartaglia et d'autres auteurs est le suivant (2) :

Trois jeunes dames fort aimables ont pour maris trois hommes très jaloux; dans une excursion faite en commun les trois couples rencontrent une rivière qu'ils se proposent de traverser, mais ils n'ont à leur disposition, à cet effet, qu'un petit bateau dans lequel deux personnes seulement peuvent trouver place. On demande comment s'effectuera le passage sachant qu'il est convenu entre les maris qu'aucune femme ne sera en compagnie d'un homme si son mari n'est pas présent.

La façon d'opérer dans ce cas est presque évidente et peut se montrer très simplement en se servant de six figures prises dans un jeu de cartes.

Un autre problème analogue au dernier mentionné est celui de n couples (hommes et femmes) qui se proposent de traverser une rivière au moyen d'un bateau manœuvré par une seule personne et ne contenant que $n - 1$ places, avec cette condition qu'aucune femme ne peut être sans son mari en société avec d'autres hommes. Le cas où $n = 3$ nous donne le problème d'Alcuin.

Designons par y le nombre des traversées nécessaires d'une rive à l'autre. On démontre que pour

$$n = 3, \quad y = 11,$$
$$n = 4, \quad y = 9,$$

et que pour

$$n > 4, \quad y = 7.$$

La démonstration ne présente aucune difficulté.

(1) Ozanam. — Edition de 1803, vol. I, p. 171 ; édition de 1840, p. 77.
(2) Bachet. — *Appendice, problème* IV, p. 212.

Le problème suivant toujours dans le même ordre d'idée est dû au défunt et regretté Lucas [1].

Trouver le plus petit nombre x de passagers qu'un bateau peut contenir pour permettre à n couples de personnes mariées de traverser une rivière, sachant qu'aucune femme ne peut être laissée en compagnie d'un autre homme si son mari n'est pas présent, et que le bateau n'est manœuvré que par une seule personne. Déterminer également le plus petit nombre y de traversées nécessaires d'une rive à l'autre.

M. Delannoy a montré que si

$n = 2$,	on a	$x = 2$,	$y = 5$,
$n = 3$,		$x = 2$,	$y = 11$,
$n = 4$,		$x = 3$,	$y = 9$,
$n = 5$,		$x = 3$,	$y = 11$,

et enfin

$n > 5$,	$x = 4$,	$y = 2n - 1$.

M. de Fontenay a fait remarquer qu'en admettant l'existence d'une île au milieu de la rivière, le passage peut toujours s'effectuer avec un bateau ne contenant que deux personnes. S'il n'y a seulement que deux ou trois couples, l'île n'est pas nécessaire et le cas est compris dans ce qui précède. Mais si on suppose $n > 3$, le plus petit nombre de passages à effectuer d'une rive à l'autre est $8(n - 1)$.

Voici sa solution : Les neuf premières traversées sont les mêmes quel que soit le nombre des couples en présence : le résultat est le transfert d'un couple sur la rive opposée. Les huit passages qui suivent ont pour effet de faire passer un couple de la première rive sur la rive opposée. Cette série de huit opérations doit être reprise autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'un seul couple sur la première rive, un seul couple dans l'île et tous les autres couples sur la seconde rive. Les sept dernières traversées ont pour résultat d'amener les deux derniers couples sur la seconde rive.

[1] LUCAS. — Vol. I, pp. 15-18, 237-238.

La solution pour le cas de quatre couples se résume dans un tableau : représentons les quatre couples par les lettres A, *a*; B, *b*; C, *c*; D, *d*; les positions des hommes et des femmes après chaque manœuvre du bateau sont indiquées par la position respective des lettres dans les lignes verticales du tableau ci-après :

	Sur la première rive	Dans l'île	Dans la seconde rive
Position à l'origine	A,a; — B,b; — C,c; — D,d.	»	»
Après le 1er passage.	ABCD . . cd	. . . . ab . .	. . . .
— 2e —	ABCD . bcd	. . . . a . . .	. . . .
— 3e —	ABCD . . . d	. . . . abc .	. . . .
— 4e —	ABCD . . cd	. . . . ab . .	. . . .
— 5e —	. . CD . . cd	AB . . ab . .	. . . .
— 6e —	. . CD . . cd	AB	. . . . ab . .
— 7e —	. . CD . . cd	AB . . . b . .	. . . . a . . .
— 8e —	. . CD . . cd	. . . . . b . .	AB . . a . . .
— 9e —	. . CD . . cd	. B . . . b . .	A . . . a . . .
— 10e —	. BCD . . cd	. . . . . b . .	A . . . a . . .
— 11e —	. BCD	. . . . . bcd	A . . . a . . .
— 12e —	. BCD . . . d	. . . . . bc .	A . . . a . . .
— 13e —	. . . D . . . d	. B C . . bc .	A . . . a . . .
— 14e —	. . . D . . . d	. . . . . bcd	ABC . a . . .
— 15e —	. . . D . . . d	. . . . abc .	ABC . . . . .
— 16e —	. . . D . . . d	. . . . . b . .	ABC . a . c .
— 17e —	. . . D . . . d	. B . . . b . .	A . C . a . c .
— 18e —	. B . D . . . d	. . . . . b . .	A . C . a . c .
— 19e —	. . . . d	. B . D . b . .	A . C . a . c .
— 20e —	. . . . d	. . . . . b . .	ABCD a . c .
— 21e —	. . . . d	. . . . . bc .	ABCD a . . .
— 22e —	. . . . d	. . . .	ABCD abc .
— 23e —	. . . . . . cd	. . . .	ABCD ab . .
— 24e —	. . . .	. . . .	ABCD abcd

M. G. Tarry a imaginé une généralisation qui complique encore plus la solution : il suppose que chaque homme voyage avec un harem composé de *m* femmes ou concubines; de plus, comme les mahométanes élevées dans la retraite n'ont pas l'habitude du travail, il est raisonnable de supposer qu'elles seront incapables de manœuvrer le bateau sans l'aide d'un homme, d'où nouvelle difficulté.

Les chrétiens trouveront probablement qu'ils ont déjà eu assez de peine pour traverser la rivière avec une seule femme, et nous nous contenterons de signaler l'embarras des disciples du Coran qui, inspirés par le Prophète, trouveront certainement le moyen de sortir d'une situation si pénible.

Lignes géodésiques. — Les problèmes de géométrie relatifs à la recherche de la plus petite route possible d'un point à un autre sur une surface courbe présentent souvent des difficultés, mais la détermination des lignes géodésiques sur une surface plane ou sur des surfaces planes est en général aisée.

Nous allons en donner un exemple mais en faisant remarquer que nous aurions hésité à le citer si nous n'avions constaté, par expérience, que quelques lecteurs ne saisissent pas exactement la solution de ces questions.

Une chambre mesure 30 pieds de longueur, 12 pieds de largeur et 12 pieds de hauteur. Sur la verticale passant par le milieu d'un des petits murs et à un pied du plafond se trouve une araignée (1), sur la verticale passant par le milieu du mur opposé et à 11 pieds du plafond se trouve une mouche. L'araignée rejoint la mouche qui, paralysée par la peur, ne bouge pas.

Le problème consiste à déterminer la plus petite route que l'araignée peut suivre (2).

(1) Le texte anglais porte « une guêpe ».

(2) Nous avons entendu proposer une pareille question à Cambridge en 1903, mais la seule publication où nous l'avons trouvée est le *Daily Mail*, Londres, 1er février 1905.

Pour obtenir une solution nous ferons observer que l'on peut découper une feuille de papier de telle sorte qu'en la pliant convenablement, on obtienne un modèle de la chambre.

Cette opération peut se faire de plusieurs manières.

La feuille de papier une fois découpée est développée de nouveau sur une surface plane, et s'il est possible alors de joindre les deux points représentant l'araignée et la mouche par une droite située en entier sur la feuille, on a la ligne géodésique passant par ces deux points.

La question revient donc à déterminer la manière de découper le papier qui donne la plus petite route de cette nature.

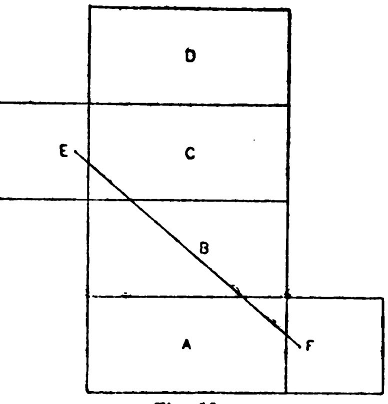


Fig. 33.

Voici un diagramme correspondant à une solution de la question et dans lequel A représente le parquet, B et D les grands murs latéraux, C le plafond, et E et F les positions occupées à l'origine par l'araignée et la mouche sur les deux petits murs.

Sur cette figure, le carré de la distance EF est $(32)^2 + (24)^2$ et par suite EF $=$ 40 pieds.

Problèmes avec des jetons disposés en lignes. — Un grand nombre de problèmes de positions et de jeux peuvent s'effectuer et sont rendus plus saisissables avec une boîte de jetons, principalement lorsqu'ils sont de deux couleurs. Des pièces de monnaie, des pions ou des cartes remplissent évidemment le même but.

Premier problème avec des jetons. — La question suivante est certainement familière à plusieurs de nos lecteurs.

Dix jetons (ou pièce de monnaie) sont disposés sur une même ligne à la suite les uns des autres et on peut faire sauter chacun d'eux par dessus les deux qui lui sont adjacents soit d'un côté, soit de l'autre, pour le déplacer sur le troisième jeton qui les suit immédiatement.

On demande de déplacer les jetons suivant cette règle de façon à obtenir cinq piles équidistantes.

Donnons aux jetons, pris dans leur positon initiale, des numéros d'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et procédons comme il suit :

Plaçons 7 sur 10, 5 sur 2, 3 sur 8, 1 sur 4 et enfin 9 sur 6.

Les jetons sont alors disposés par 2 comme l'indique la figure ci-après.

2-5 4-1 6-9 8-3 10-7

De même en posant 4 sur 1, 6 sur 9, 8 sur 3, 10 sur 7 et finalement 2 sur 5, les jetons se trouvent disposés par deux sur les emplacements occupés à l'origine par les n°s 1, 3, 5, 7 et 9 (1).

On peut se proposer un jeu à peu près semblable avec huit jetons mais dans ce cas les quatre groupes formés en dernier lieu ne sont pas équidistants. Le déplacement s'opère en posant 5 sur 2, 3 sur 7, 4 sur 1 et enfin 6 sur 8.

Le jeu ainsi compris peut également s'effectuer avec $(8 + 2n)$ jetons, car si nous posons 4 sur 1, nous laissons sur l'un des côtés du

(1) Dans les solutions données par M. Ball un groupe de deux jetons superposés est compté pour deux, c'est-à-dire que le saut d'un jeton par dessus un tel groupe est considéré comme satisfaisant à la règle du jeu; mais on peut se proposer d'exécuter la récréation en demandant qu'un pareil groupe ne soit compté que pour un, c'est-à-dire en se posant cette règle que le jeton déplacé doit être séparé du jeton sur lequel on veut le poser, d'une façon effective par deux pièces, simples ou doubles.

Nous donnons deux solutions du jeu dans ce cas :

On pose 7 sur 10, 5 sur 2, 9 sur 4, 3 sur 8 et enfin 1 sur 6, ou, solution symétrique : 4 sur 1, 6 sur 9, 2 sur 7, 8 sur 3 et enfin 10 sur 5. Faute de jetons, on peut prendre des petits morceaux de bois d'égale longueur, dix allumettes par exemple, et on forme des croix équidistantes.

couple ainsi formé une ligne de $(8 + 2n - 2)$ jetons. Cette ligne peut, à son tour, être réduite à $(8 + 2n - 4)$ jetons et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une ligne de huit jetons sur lesquels nous pourrons opérer comme il est expliqué plus haut.

Une généralisation plus complète consisterait à examiner le cas de n jetons en se posant comme règle que chacun d'eux doit sauter par dessus m jetons adjacents, soit d'un côté soit de l'autre.

Second problème avec des jetons. — On doit au professeur Tait [1] un autre problème d'une nature à peu près analogue.

On place sur une même ligne et en contact quatre pièces d'argent (ou quatre jetons blancs) alternées avec quatre pièces de cuivre (ou quatre jetons noirs) et l'on demande de disposer les quatre pièces de cuivre et à leur suite les quatre pièces d'argent en quatre mouvements distincts, en s'imposant comme condition que chaque mouvement comprendra le déplacement de deux pièces ; ou de deux jetons en contact (sans modifier la position relative des pièces du couple ainsi déplacé).

Voici sa solution : Désignons les pièces d'argent par a, les pièces de cuivre par b et marquons d'une * les espaces libres contigus ; les positions successives des pièces peuvent être ainsi représentées.

A l'origine	* * *a b a b a b a b*
après le 1er mouvement	*b a a b a b a* * * *b*
— 2e —	*b a a b* * * *a a b b*
— 3e —	*b* * * *b a a a a b b*
— 4e —	*b b b b a a a a* * *

L'opération se conduit d'après cette règle : on suppose les pièces disposées en cercle avec deux espaces libres et on déplace à chaque coup et simultanément les deux pièces qui précèdent les cases vides de un et de deux rangs.

(1) *Philosophical Magazine*, Londres, janvier 1884, 5e série, vol. XVII, p. 39.

Il vient immédiatement à l'idée de généraliser cette question en opérant sur $2n$ jetons, dont n sont blancs et n noirs, et si n est plus grand que quatre, le problème peut se résoudre en n mouvements. Nous avouons cependant avoir échoué dans la recherche d'une règle comprenant tous les cas semblables. Mais M. Delannoy a donné des solutions (¹) pour les cas où n est de l'une des formes $4m$, $4m+2$, $4m+1$ ou $4m+3$.

Dans les deux premiers cas, les $\frac{n}{2}$ premiers mouvements s'effectuent en déplaçant des couples de jetons de deux couleurs, les $\frac{n}{2}$ derniers mouvements en déplaçant des couples de jetons de même couleur.

Dans les deux derniers cas, le premier mouvement est le même que celui qui a été indiqué plus haut, c'est-à-dire qu'il consiste à déplacer l'avant-dernier jeton et celui qui le précède au commencement de la ligne; les $\frac{n-1}{2}$ mouvements suivants s'effectuent en déplaçant $\frac{n-1}{2}$ couples de jetons de deux couleurs et dans les $\frac{n-1}{2}$ derniers mouvements on fait mouvoir $\frac{n-1}{2}$ couples de jetons de même couleur.

On pourrait également résoudre le problème en cherchant à disposer les pièces de chaque nature à chacune des extrémités de la ligne au lieu d'en former une suite continue.

M. Tait a introduit une variante en imposant, comme nouvelle condition, de renverser à chaque coup l'ordre des deux jetons du couple déplacé; dans ce cas on trouve qu'il est nécessaire d'effectuer cinq mouvements (ou d'une manière plus générale, $n+1$ mouvements).

Problèmes sur un échiquier avec des jetons ou des pions. — Pour les trois problèmes suivants on se sert d'un échiquier et de

(¹) *La Nature*, juin 1887, p. 10.

pièces de monnaie ou de jetons de deux couleurs, ou encore mieux de pions dont la manœuvre est bien plus facile que celle des jetons.

Le premier de ces jeux est caractérisé par ce fait que chaque position des pièces ne comporte que deux mouvements possibles. Entre ces limites l'analyse est possible. Nous ne discuterons donc pas les problèmes de cette nature comportant un plus grand nombre de mouvements.

Premier problème avec des pions (1). — Sur une rangée de sept cases d'un échiquier on place, sur 3 cases à une extrémité, trois pions blancs, représentés par la lettre *a* sur la figure ci-après, et sur 3 autres cases à l'autre extrémité, trois pions noirs désignés par la lettre *b* sur notre figure ; la case du milieu est libre. Chaque pièce peut se mouvoir dans une seule direction : les pions *a* marchent de gauche à droite et les pions *b* de droite à gauche. Si une case voisine de celle occupée par un pion est libre, ce pion peut venir l'occuper à la condition de se déplacer dans le sens imposé ; ou encore un pion peut sauter par-dessus un autre de couleur différente, dans le sens de son mouvement, pour venir se placer sur la case vide immédiatement voisine. Cela posé, la question consiste à faire passer les trois pions blancs à la place des trois pions noirs, et vice versa, en utilisant la case du milieu.

La solution exige quinze mouvements. Elle peut s'effectuer en déplaçant tout d'abord un pion blanc, puis successivement deux pions noirs, ensuite trois pions blancs, puis trois pions noirs, trois pions blancs deux pions noirs et enfin un pion blanc.

a	*a*	*a*		*b*	*b*	*b*

Fig. 34.

On peut résumer cette solution en numérotant les cases et en faisant remarquer que la case vide qui porte à l'origine le n° 4 prend successivement les n^os d'ordre 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 6, 4. 2, 3, 5, 4. Six des mouvements sont simples et neuf se font avec sauts.

(1) Lucas. — Vol. II, part. V, pp. 141-143.

De même si nous avions n pions blancs disposés sur n cases à l'extrémité d'une rangée comprenant $(2n + 1)$ cases, et n pions noirs placés sur les n cases à l'autre extrémité de la ligne, on peut les faire changer de place en exécutant $n(n + 2)$ mouvements, dont voici l'ordre successif :

Un pion, deux pions, trois pions..., $(n - 1)$ pions, n pions, n pions, n pions, $(n - 1)$ pions..., deux pions et un pion ; tous les pions d'un même groupe sont de la même couleur et d'une couleur différente de celle des pions du groupe qui précède.

$2n$ des mouvements sont simples, c'est-à-dire consistent en de simples pas, et les n^2 autres se font avec sauts.

Second problème avec des pions [1]. — Un jeu à peu près semblable peut encore s'exécuter sur une tablette rectangulaire ou carrée. Nous allons donner une description de la récréation en considérant le cas d'un carré divisé en quarante-neuf cases dont quarante-huit sont couvertes d'un nombre égal de pions blancs et de pions noirs, la quarante-neuvième case, laissée vide, étant celle du milieu.

a	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*		*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*

Fig. 35.

Les pions sont symétriquement disposés, noirs et blancs, par rapport au centre de l'échiquier et sont représentés par les lettres *b* (blanc) et *a* (noir) sur notre figure.

Les pions blancs peuvent se déplacer de gauche à droite et de haut en bas, tandis que les mouvements des pions noirs s'effectuent de droite à gauche et de bas en haut. Le jeu consiste à échanger les positions des pions blancs et des pions noirs en appliquant les règles du jeu précédent en ce qui concerne l'occupation d'une case vide voisine ou le saut par dessus un pion.

(1) Lucas. — Vol. II, part. V, p. 147.

La solution se déduit de celle du problème précédent.

Les pièces dans la colonne médiane peuvent être échangées en quinze mouvements. Pendant que ces quinze mouvements s'effectuent, chacune des sept cases de cette colonne devient libre à un moment donné et nous pouvons alors échanger les pièces de la rangée horizontale correspondante, ce qui exige encore quinze mouvements pour chaque rangée. Il résulte de là que le nombre total des mouvements à effectuer est égal à

$$15 + 7 \times 15 = 120.$$

En disposant de la même manière $2n(n+1)$ pions blancs et $2n(n+1)$ pions noirs sur un échiquier de $(2n+1)^2$ cases, on peut opérer l'échange des pièces en $2n(n+1)(n+2)$ mouvements.

$4n(n+1)$ de ces mouvements sont simples, c'est-à-dire consistent en de simples pas et $2n^2(n+1)$ s'effectuent par sauts.

Troisième problème avec des pions. — Le jeu suivant, un peu plus compliqué que les précédents, a été décrit pour la première fois, pensons, nous dans la première édition de cet ouvrage, mais comme il s'est répandu depuis dans le commerce il est probablement connu aujourd'hui de nos lecteurs.

Sur un échiquier de vingt-cinq cases, on place huit pions ou jetons blancs sur les huit cases marquées d'une lettre minuscule sur la figure 36, et huit pions ou jetons noirs sur les huit cases marquées d'une lettre majuscule; la case centrale marquée d'une astérisque est libre. Les pions blancs et noirs peuvent se mouvoir suivant les règles déjà établies, c'est-à-dire, les pions blancs, horizontalement de gauche à droite et verticalement de haut en bas; les pions noirs, horizontalement de droite à gauche et de bas en haut.

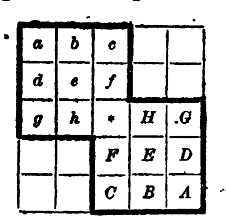


Fig. 36.

Le jeu consiste à faire passer tous les pions blancs à la place des pions noirs, et vice versa, sachant qu'aucun mouvement n'est permis en dehors de l'espace limité par les traits forts de la figure.

Puisqu'il n'y a qu'une seule case libre sur l'échiquier et puisque les mouvements en diagonale et en sens rétrograde ne sont pas permis, il s'ensuit qu'il n'est pas possible, à chaque mouvement, de déplacer plus de deux pièces de chaque couleur. Le nombre des solutions est très grand, nous en donnons une en quarante-huit mouvements déterminés d'une façon empirique; les lettres indiquent les cases *d'où* les pions sont successivement déplacés,

*h*H * *f*FEHG * *cbhgdf*FC * *h*HBAC * *cabh*H *
*cf*FDGHBC * *ghef*F * *h*H *

Il faut remarquer que les vingt-quatre premiers mouvements conduisent à une position symétrique pour chaque pièce et que les vingt-trois mouvements suivants peuvent être obtenus de suite en écrivant les vingt-trois premiers dans un ordre inverse et en intervertissant les lettres minuscules et majuscules.

La théorie mathématique des jeux analogues à celui que nous venons de décrire pourrait peut-être se faire en employant la notation de Vandermonde décrite plus loin dans le chapitre VI ou au moyen d'une méthode identique à celle usitée dans la théorie du solitaire [1], Nous ne pensons pas que cette théorie ait jamais fait l'objet d'une étude quelconque et même qu'elle conduise à des résultats intéressants.

Problèmes sur un échiquier avec des pièces du jeu. — On connait plusieurs autres récréations mathématiques semblables à celles que nous venons de décrire et qui s'exécutent avec les pièces d'un jeu d'échecs (autres que les pions). L'une d'elles con-

(1) Pour la théorie du Solitaire voir Reiss. — *Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels*, Journal de Crelle, Berlin, 1858, vol. LIV, pp. 344-379 ; et Lucas. — Vol. I, partie V, pp. 89-141.

siste à disposer huit reines de telle sorte qu'aucune d'entre elles ne soit en prise, nous la traitons plus loin. Dans une autre on se propose de déplacer un cavalier sur un échiquier de façon à le faire passer une fois seulement sur toutes les cases, elle est examinée plus loin. Nous ne mentionnerons ici qu'un problème des plus simples qui ne présente de l'intérêt que parce qu'on le trouve dans un manuscrit de Guarini écrit en 1512 ; il est rappelé par Lucas, mais si nos recherches sont complètes, n'a pas encore été publié ailleurs.

Problème de Guarini. — Sur une tablette divisée en neuf cases comme celle tracée ci-après, on place deux cavaliers blancs dans les cases des angles supérieurs, marquées *a*, *d*, et deux cavaliers noirs dans les cases des angles inférieurs marquées *b*, *c* ; les autres cases sont libres. Le problème consiste à déplacer les pièces de telle sorte que les cavaliers blancs viennent occuper les cases *b*, *c* et les cavaliers noirs les cases *a*, *d*.

a	*C*	*d*
D		*B*
b	*A*	*c*

Fig. 37.

La solution est presque évidente. On déplace les pièces de *a* en A, de *b* en B, de *c* en C et de *d* en D. On va ensuite, de A en *d*, de B en *a*, de C en *b* et de D en *c*. L'effet de ces huit mouvemeuts est le même que si on avait fait tourner la tablette de 90°. On répète alors les mouvements, c'est-à-dire qu'on déplace successivement les pièces de *a* en A, de *b* en B, de *c* en C et de *d* en D ; puis de A en *d*, de B en *a*, de C en *b*, et de D en *c*. On obtient ainsi le résultat demandé.

Jeux géométriques divers. — Beaucoup de ces jouets que l'on trouve sous le nom de « questions » et qui sont faits avec des petites tiges métalliques, ou du fil de fer, constituent des récréations géométriques sur lesquelles nous n'avons pas l'intention de nous arrêter. Cependant quelques-unes de ces questions qui se vendent couramment dans les rues pour quelques sous présentent des

exemples ingénieux de problèmes de géométrie de situation. Il serait difficile d'en donner la description sans une figure, mais leur construction est peu coûteuse et en réalité on peut reproduire avec un couple de tiges rigides et une pelote de ficelle, ou même avec des allumettes une foule de ces récréations. On en trouvera plusieurs exemples dans l'appendice du quatrième volume de l'édition de 1723 de l'ouvrage d'Ozanam.

Les rubans paradromiques. — L'expérience connue des *rubans paradromiques* que l'on obtient en coupant une bande de papier disposée d'une certaine manière vient à l'appui de cette remarque qu'il est difficile de se rendre compte mentalement des effets qui peuvent être obtenus lorsqu'on modifie géométriquement certaines figures.

Prenons une bande de papier ou un ruban de un ou deux centimètres de largeur, par exemple, sur neuf ou dix de long et traçons au milieu, dans le sens de sa longueur, un trait continu AB, puis collons l'extrémité A sur l'extrémité B ; nous formons ainsi un ruban fermé analogue à une portion de surface cylindrique. Si maintenant, avec des ciseaux, nous coupons ce ruban suivant la ligne médiane AB, nous obtenons deux rubans fermés exactement semblables au premier mais ayant une largeur moitié moindre. Supposons maintenant qu'avant d'effectuer le collage, on ait fait tourner l'extrémité A de deux angles droits (ceci revient à dire, qu'au moment du collage on applique l'envers de l'extrémité A sur l'endroit de l'extrémité B), puis coupons encore suivant AB, nous obtenons *un seul* ruban cylindrique présentant un développement double du premier.

Autre supposition : avant de coller les extrémités A et B faisons une torsion entière, c'est-à-dire tournons l'une des extrémités de quatre angles droits, puis le collage une fois fait coupons suivant la ligne médiane ; on obtient cette fois-ci deux rubans entrelacés. Si le lecteur croit que ces résultats peuvent être prévus, nous lui conseillons comme problème intéressant, d'essayer d'annoncer

ceux qu'il obtiendrait en coupant suivant leurs lignes médianes, les rubans formés dans la seconde et la troisième expériences.

La théorie de cette question est due à J.-B. Listing (1) qui a examiné et discuté le cas où l'on ferait exécuter à l'extrémité A avant de la coller sur l'extrémité B, m demi-rotations.

Pour m pair nous avons une surface ayant deux faces (ou si l'on aime mieux : endroit et envers) et deux bords, qui a été appelée *paradromique*; en coupant cette bande suivant la ligne médiane préalablement tracée, on obtient deux bandes présentant chacune m demi-rotations, et qui sont entrelacées $\frac{m}{2}$ fois.

Pour m impair, on a une surface ne présentant qu'une face (c'est-à-dire sans endroit, ni envers) et qu'un bord ; cette bande coupée suivant la ligne médiane nous donne un seul ruban présentant $2m$ demi-rotations, et si m est plus grand que l'unité, ce ruban forme un nœud.

(1) *Vorstudien zur Topologie, Die Studien*, Göttingen, 1847, part. X.

CHAPITRE VI

QUESTIONS DE MÉCANIQUE

Nous allons passer maintenant à l'examen de quelques questions de mécanique conduisant à des résultats intéressants peut-être au point de vue historique mais dont quelques-uns paraîtront paradoxaux. Les problèmes de mécanique sont généralement plus difficiles que ceux d'arithmétique, d'algèbre ou de géométrie, et les explications que l'on donne de certains phénomènes — tels, par exemple, que le vol des oiseaux — sont encore bien incomplètes ; d'un autre côté, les théories sur lesquelles sont basées plusieurs autres questions présentant beaucoup d'intérêt sont trop ardues, trop scientifiques, pour trouver place dans un livre qui n'est pas purement technique. Nous nous bornerons donc ici, comme dans les chapitres qui précèdent, à traiter des questions absolument élémentaires et bien connues de tous ceux qui ont quelques notions de mécanique.

Nous supposons le lecteur familiarisé avec les principes fondamentaux de cinématique et de dynamique et ayant une parfaite connaissance des trois lois formulées par Newton que nous rappelons ci-après :

1° Tout corps qui est à l'état de repos ou qui se meut d'un mouvement uniforme suivant une ligne droite persiste dans cet état de repos ou de mouvement à moins qu'une cause extérieure n'agisse sur lui.

2° Toute variation de mouvement (1) est proportionnelle à la force qui le produit et a lieu en ligne droite suivant la direction de cette force.

3° L'action d'un corps sur un autre est égale en grandeur mais opposée en direction à la réaction du second corps sur le premier.

De la première et de la seconde de ces lois on déduit les principes sur lesquels on s'appuie pour résoudre toutes les questions relatives au mouvement d'un point matériel soumis à l'action de forces connues.

De la troisième loi découle le principe sur lequel on se base pour résoudre les problèmes dans lesquels on fait intervenir l'action combinée de deux ou de plusieurs points matériels l'un sur l'autre.

Mouvement. — L'idée de mouvement soulève des difficultés qui depuis longtemps ont été des sujets favoris de paradoxes et dont quelques uns sont du domaine de la philosophie des mathématiques.

Paradoxe de Zénon. — Un des plus anciens est cette remarque faite par Zénon : une flèche ne peut se mouvoir là où elle n'est pas, et puisque d'un autre côté elle ne peut se déplacer là où elle se trouve (c'est-à-dire dans l'espace qu'elle occupe exactement), il s'ensuit que la flèche ne peut être mise en mouvement.

La réponse que l'idée même du mouvement de la flèche impliquait le passage de l'endroit occupé à un autre point de l'espace n'était pas valable pour Zénon, qui paraissait croire que l'apparence du mouvement d'un corps était un phénomène produit par les apparences successives d'un corps au repos mais dans différentes positions.

(1) Le mouvement s'entend ici comme mesuré par ce qu'on appelle *momentum* en Angleterre et *quantité de mouvement* en France.

Le mot momentum est usité par abréviation pour désigner le produit de la masse mise en mouvement par la vitesse.

Zenon avançait également que l'idée elle-même de mouvement ne pouvait se concevoir : attendu que ce qui se déplace doit atteindre le milieu de sa course avant d'en atteindre l'extrémité. Par suite, la supposition du mouvement présuppose un autre mouvement, à son tour ce dernier en présuppose un autre, et ainsi de suite indéfiniment. Son objection était, en fait, analogue à la difficulté biologique que Swift a exposée ainsi.

« Ainsi que le remarque le naturaliste, une puce a des puces plus petites qui vivent sur elles. Celles-ci sont mordues à leur tour par de plus petites. Et cela continue ainsi indéfiniment. »

Ou comme de Morgan a préféré l'exprimer :

« Les grosses puces ont sur le dos des petites puces qui les piquent,
« et les petites puces en ont de plus petites et ainsi de suite indéfiniment.
« Mais les grosses puces elles-mêmes, peuvent aller, à leur tour,
« sur de plus grosses encore, et ces dernières sur de plus grosses,
« et encore de plus grosses et ainsi de suite. »

Achille et la tortue. — Le paradoxe de Zénon relatif à la course d'Achille et de la tortue est plus connu.

Achille marchant dix fois plus vite que la Tortue et celle-ci ayant une avance de 1.000 mètres (par exemple), Zénon prétendait que l'animal ne serait jamais atteint par le guerrier agile. Voici le raisonnement qu'il tenait : pendant qu'Achille parcourt les 1 000 mètres d'avance, la tortue parcourt un chemin dix fois plus petit ou 100 mètres ; pendant qu'Achille parcourt ces 100 mètres, la tortue en parcourt 10 ; et ainsi de suite. Achille s'approche bien de plus en plus de la tortue, mais il reste toujours un certain espace qui les sépare, de sorte qu'en réalité la tortue n'est jamais atteinte.

Zenon estimait que ce raisonnement confirmait sa façon de voir : l'idée commune du mouvement étant selon lui contradictoire.

Paradoxe de Zenon sur le temps. — On fait généralement ressortir l'erreur commise dans le raisonnement de Zénon en re-

marquant que si, comme on vient de l'expliquer, le temps mis par Achille pour atteindre la tortue, c'est-à-dire pour gagner ses avances successives peut être divisé en un nombre infini de parties, ces parties deviennent de plus en plus petites et forment les termes d'une progression géométrique décroissante ; la somme de tous ces termes donne le temps fini après lequel Achille atteindra la tortue.

Zénon aurait probablement répliqué à ce raisonnement qu'il est basé sur cette supposition que l'espace et le temps sont indéfiniment divisibles, et c'est ce qui fait précisément l'objet de la discussion ; ce philosophe avançait, en effet, que la division des grandeurs était limitée.

Il parait de plus avoir soutenu que, de même qu'il n'était pas possible à un observateur judicieux d'admettre la divisibilité infinie du temps, de même il lui était également impossible de concevoir une mesure minimum du temps.

Car, avançait-il, supposons que τ représente le plus petit intervalle de temps qu'il soit possible de concevoir, et considérons trois lignes horizontales abc, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$, composées chacune de trois longueurs consécutives égales p, disposées de telle sorte que les longueurs a, a', a'' ; b, $b'\,b''$; c, c', c'', soient verticalement l'une au dessous de l'autre.

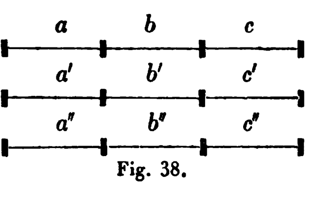


Fig. 38.

Imaginons maintenant que la seconde ligne se déplace vers la droite, en entier et d'une longueur p dans le temps τ, pendant que simultanément la 3e ligne se déplace vers la gauche.

Les trois longueurs b, a', c'' se trouveront au bout du temps τ verticalement au-dessus l'une de l'autre, et pendant ce temps τ (qui par hypothèse est indivisible), la longueur a' est passée verticalement au-dessus des deux longueurs b'', et c''. Donc le temps est divisible contrairement à l'hypothèse faite.

Le paradoxe de Tristam Shandy. — M. Russell a énoncé [1] un paradoxe à peu près semblable à celui d'Achille et de la Tortue, sauf que les intervalles de temps considérés vont en croissant de plus en plus avec le cours des évènements.

Tristam Shandy a consacré, comme nous le savons, deux ans à écrire l'histoire des deux premiers jours de sa vie et il se désespérait attendu qu'à ce compte, les évènements devant s'accumuler plus rapidement qu'il ne lui était possible de les raconter, il ne pourrait jamais arriver à écrire l'histoire entière de sa vie, si longue que pût-être son existence. Cependant s'il avait vécu assez longtemps, et ne s'était pas fatigué de son travail, il lui aurait été possible de faire sa biographie complète, quand bien même sa vie aurait toujours été aussi fertile en évènements qu'au début. Car en passant la première année à composer le récit des évènements survenus le premier jour de sa vie, ceux du n^e jour auraient été décrits la n^e année, par suite, avec le temps, les évènements d'un jour quelconque se trouveraient racontés et aucune partie de sa biographie n'aurait été inconnue.

Cette augmentation pourrait être mise sous forme de démonstration pour établir que la partie est égale au tout.

Les questions telles que celles dont nous venons de parler, et dans lesquelles intervient la notion du continu dans l'espace et dans le temps sont d'un ordre élevé.

Mouvement angulaire. — L'idée du mouvement angulaire présente des difficultés à toute personne peu familiarisée avec les mathématiques.

Voici, par exemple, une proposition bien connue relative au mouvement sur une spirale logarithmique (et dont le résultat est exact avec les conventions ordinaires des mathématiques) qui montre qu'un corps qui se déplace avec une vitesse uniforme et aussi lentement

(1) B.-A.-W. Russell, *Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, vol. I, p. 358.

qu'on le désire, peut dans un temps fini, tourner autour d'un point un nombre infini de fois.

Une droite OP tourne autour d'un de ses points O et en même temps un mobile P parcourt la droite de façon que si l'angle que fait OP avec une direction fixe OX croît en progression arithmétique, la longueur OP croisse en progression géométrique, la courbe décrite par le point P est une spirale logarithmique. A chaque rotation de quatre droits du rayon vecteur OP correspond une spire.

Si l'on fait tourner OP en sens inverse, la longueur OP décroît au lieu de croître, et le point P décrit des spires de plus en plus rapprochées de O.

Toutes ces spires sont semblables et la longueur de chacune d'elles est une fraction constante $\frac{1}{n}$, par exemple, de la longueur de la spire précédente, et à l'intérieur d'une spire quelconque il y a un nombre infini de spires dont les longueurs diminuent de plus en plus à mesure qu'on se rapproche du pôle O.

Considérons maintenant un mobile Q qui se déplace d'une façon uniforme sur la spirale en marchant vers le pôle. S'il parcourt la première spire en a secondes, il mettra $\frac{a}{n}$ secondes pour parcourir la deuxième spire, $\frac{a}{n^2}$ secondes pour parcourir la troisième spire, et ainsi de suite. Il atteindra donc le pôle au bout de

$$\left(a + \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + \frac{a}{n^3} + \ldots\right) \text{ secondes,}$$

c'est-à-dire en $\frac{an}{n-1}$ secondes. La vitesse est uniforme et l'on voit ainsi que dans un temps fini, le mobile Q aura parcouru un nombre infini de spires, c'est-à-dire aura tourné un nombre infini de fois autour du pôle O (1).

(1) La proposition est présentée sous cette forme dans l'ouvrage de J. Richard, *Philosophie des Mathématiques*, Paris, 1903, pp. 119-120.

Du mouvement relatif. — Bien que les discussions philosophiques soulevées par Zénon soient tranchées ou abandonnées, la notion élémentaire du mouvement relatif a souvent suggéré des objections et Zénon lui-même n'a pu donner l'explication d'un simple phénomène reposant sur cette notion.

Comme l'un des exemples les plus faciles du genre, nous pouvons citer cette question : combien de trains allant de B vers A un voyageur, se rendant de A en B, rencontrera-t-il et croisera-t-il en admettant que le voyage dure, de toutes les manières, quatre heures et demie et que les trains partent toutes les heures de chaque extrémité ? — La réponse est évidemment 9.

Ou encore : disposons en contact sur une table deux pièces de 10 centimes, les faces apparentes ; supposons l'une de ces pièces fixe et faisons tourner l'autre autour mais sans qu'il y ait glissement, et de façon qu'elle revienne dans sa position initiale après une révolution complète. On demande combien la pièce mobile a fait de révolutions autour de son propre centre. La réponse est 2.

Lois du mouvement. — C'est maintenant le moment de faire quelques remarques sur certains points de la mécanique dépendant, ou conséquences, des lois du mouvement.

On a souvent dit que la première loi de Newton définissait ce qu'on devait entendre par l'expression « *force* » mais ceci ne doit être entendu que dans le sens qualificatif.

Cette phrase de Clifford précise peut-être mieux le sens de la loi « une force, dit-il, est la description d'un certain genre de mouvement ». En d'autres termes, ce n'est pas une entité mais bien simplement, une façon convenable de constater, sans circonlocution, que l'on observe une certaine nature de mouvement.

On montre facilement que toute autre interprétation conduit à de véritables difficultés. Ainsi certains auteurs, partant de cette loi, en déduisent cette définition. « On donne le nom de force à toute cause produisant ou tendant à produire le mouvement d'un corps ».

Or, plus loin ces mêmes auteurs parlent de la machine à vapeur mettant un train en mouvement; il semblerait donc, d'après eux, que la locomotive est une force.

L'idée de force est difficile à saisir. Combien de personnes, par exemple, pourraient prévoir d'une façon certaine ce qui se produira dans la petite question suivante, cependant des plus simples? Une corde dont le poids est négligeable, passe sur la gorge d'une poulie; à l'une de ses extrémités on fixe un poids de 70 kilogrammes et à l'autre on attache un homme (un marin) d'un poids égal. Le poids et l'homme suspendus dans les airs sont dans une position d'équilibre. Le marin grimpant le long de la corde, le poids sera-t-il mis en mouvement? Si oui, dans quel sens se déplacera-t-il?

Il importe de bien remarquer, que d'après la première loi du mouvement, tout corps en mouvement, à moins d'être soumis à l'action d'une force extérieure, continue à se déplacer : 1° avec une vitesse uniforme, et 2° en ligne droite. La tendance que possède tout corps de rester à l'état de repos ou de continuer à se déplacer d'un mouvement uniforme a été appelée son *inertie*. Cette tendance donne l'explication d'une foule de phénomènes ou d'expériences dont le lecteur nous saura gré de citer quelques-unes.

Formons avec un certain nombre de dominos, ou de pions d'un jeu de dames, une pile verticale et donnons avec l'arête d'une règle plate ou avec une lame de couteau, un coup sec sur l'un d'eux à la base de la colonne; le domino ou le pion ainsi frappé est projeté hors de la pile en laissant un vide que la partie supérieure vient immédiatement combler en descendant d'un seul bloc et sans que les pions se séparent.

Le mouvement provoqué par le choc tend bien à se communiquer de proche en proche de façon à modifier la position relative des dominos ou des pions, mais l'effet ne se produit pas instantanément et exige plus de temps qu'il n'en faut à la partie supérieure de la colonne pour descendre.

Un grand nombre de tours dont on trouve la description dans les

collections de jeux mathématiques [1] repose sur le même principe. C'est encore à l'aide du même principe qu'on explique qu'un corps lancé et animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe principal passant par son centre de gravité continue à se mouvoir avec une vitesse angulaire uniforme en même temps que l'axe de rotation se maintient dans une direction fixe. La mesure du temps est basée sur le premier de ces faits et la théorie du déplacement d'un projectile dans un milieu résistant s'appuie sur le second.

On comprend ainsi pourquoi les canons des fusils, et en général des armes à feu sont rayés et pourquoi, lorsqu'on se propose de lancer dans une direction donnée un objet plat, léger (tel qu'une carte) ou de forme irrégulière, il est nécessaire de lui imprimer en même temps un mouvement de rotation.

Nous trouvons de nombreuses et curieuses applications de ce dernier fait dans plusieurs tours ou exercices exécutés par les acrobates, mais leur explication complète s'appuie sur des considérations étrangères à notre sujet. Nous citerons cependant une expérience intéressante, reproduite dans tous les cirques, et due, croyons-nous, à des jongleurs japonais. On place sur la surface supérieure d'un parasol un disque métallique (une pièce de 5 francs par exemple) de façon qu'il se tienne verticalement en reposant par son bord. En imprimant alors au manche du parasol un rapide mouvement de rotation, le disque est forcé de rouler sur lui-même, mais comme le parasol se déplace en glissant sous lui, il demeure en apparence immobile, tandis qu'en diminuant ou en augmentant la vitesse angulaire du parasol, le disque avance ou recule sur la surface supérieure. Ce tour s'exécute sans difficulté [2].

(1) Voir les *Récréations scientifiques* de G. Tissandier où l'on trouvera plusieurs applications ingénieuses du Principe de l'Inertie.

(2) Citons encore les applications suivantes : le grand danger qu'il y a de sauter d'une voiture dont le cheval est emporté ; le mouvement que doit faire le cavalier lancé au galop lorsque son cheval s'arrête subitement ; de même une personne qui descend d'une voiture en marche, doit imprimer à son corps un mouvement en sens contraire à l'instant où elle touche le

La tendance que possède tout corps en mouvement de continuer à se déplacer en ligne droite est quelquefois appelée *force centrifuge*. Par exemple, lorsqu'un train passe sur une partie de voie courbe, il tend à se mouvoir suivant une ligne droite et il est retenu dans la direction imposée par la résistance que lui opposent les rails de la courbe extérieure qui sont pressés d'autant plus fortement que la vitesse du train est plus grande. Cette pression peut être diminuée jusqu'à un certain point en surélevant le rail extérieur (1) et en posant à l'intérieur de la voie un contre-rail parallèle et près de la courbe intérieure (2), contre-rail contre lequel les boudins des roues de wagons viendront s'appuyer du côté du petit rayon.

Nous rapporterons à ce sujet un épisode peu connu de la guerre de sécession entre les deux Amériques (3). Dans le courant du printemps de l'année 1862 un parti de volontaires de l'armée du Nord coupa la route à l'arrière-garde des armées du Sud et s'empara d'un train avec l'intention de détruire (au moment de leur passage) la voie qui constituait la principale ligne de communication entre les différents corps confédérés et leur base d'opérations. Mais il fut découvert et poursuivi. Pour se sauver les volontaires s'arrrêtèrent sur une courbe prononcée et enlevèrent quelques rails dans le but de faire dérailler le train lancé à leur poursuite. Malheureusement pour eux, dans leur ignorance des principes de dynamique, ils enlevèrent les rails du côté du petit rayon de la voie et l'opération ne gêna en rien la poursuite de leurs adversaires (4).

sol ; ce principe explique l'élan que l'on prend pour franchir un obstacle ; c'est l'inertie qui rend si terribles les accidents de chemin de fer. Les ouvriers utilisent le même principe pour emmancher leurs marteaux, etc., etc.

(1) C'est le problème du *devers*.

(2) Ceci ne se fait pas en France, sauf pour de très faibles rayons.

(3) W. Pittenger. — *Capturing a Locomotive*, Londres, 1882, p. 104.

(4) Un pareil fait ne peut s'expliquer qu'en supposant la voie posée sur longrines, et encore !

On peut citer d'autres applications de la force centrifuge : par exemple l'expérience de la coupe remplie d'eau et que l'on fait tourner après l'avoir attachée à une corde ; le jeu de la fronde ; l'explication de la position prise

La seconde loi nous donne le moyen de mesurer les masses, les forces et, par suite « le travail ».

Un agent mécanique donné ne peut produire dans un temps déterminé qu'une quantité finie de travail. S'il est théoriquement exact qu'avec un levier rigide et un point d'appui, une force, si petite qu'elle soit, puisse déplacer une masse quelconque, si grande qu'elle soit, il n'en est pas moins vrai que ce qui est gagné en puissance est perdu en chemin parcouru. C'est une vérité rendue universelle par l'expérience de tous les jours.

Montucla (²) a donné un exemple frappant de ce principe basé sur l'anecdote bien connue d'Archimède déclarant à Hiéron qu'il lui serait possible de soulever le monde si on lui donnait un point d'appui.

Montucla a calculé le poids du globe terrestre et partant de ce fait que le travail journalier d'un homme était de 15 kilogrammes par seconde (ce qui est une estimation très élevée) il est arrivé à ce résultat qu'il faudrait environ 3 milliards de siècles, c'est-à-dire 3×10^{14} années pour soulever de près de 0m03 une masse égale à celle du globe; pour déplacer de 3 centimètres une pareille masse sur un plan horizontal, il faudrait 74,000 siècles (¹).

par les écuyers dans un cirque; la description du chemin de fer aérien de Clavière; l'explication de la rupture de meules, de volants; l'application aux essoreuses destinées à sécher mécaniquement le linge mouillé dans les lavoirs, etc., etc.

(¹) OZANAM. — Edition de 1803. Vol. II, p. 18; édition de 1840, p. 202.

(²) La question peut être envisagée à un autre point de vue également intéressant.

La terre est un ellipsoïde de révolution dont le grand axe = 12754796 mètres

et le petit axe = 12712160 mètres.

$$\text{Son volume} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{12754796}{2} \times \frac{12712160^2}{4}$$
$$= 1\,079\,224\,648\,425\,130\,163\,855 \text{ mètres cubes.}$$

Or, la densité moyenne de la terre = 5,50, ce qui donne pour son poids

Equilibre. — Tous ceux qui ont la moindre notion de mécanique savent que lorsqu'un corps est en équilibre sous l'influence de son seul poids, la verticale du centre de gravité tombe à l'intérieur de la base de sustentation ou passe par l'axe de suspension, suivant que le corps repose sur un plan horizontal ou est soutenu par un axe horizontal.

On peut énoncer d'une manière générale les conditions pour qu'un système pesant soit en équilibre stable ou en équilibre instable. Dans le cas de l'équilibre stable la hauteur du centre de gravité est un *minimum* par rapport aux positions voisines que prend le système quand on le dérange un peu de l'équilibre, elle est un *maximum* dans le cas de l'équilibre instable. Cela tient à ce que *le centre de gravité tend toujours à descendre*. En d'autres termes, si, pour produire le déplacement d'un corps, on est obligé de développer un certain travail afin de contrebalancer l'action de la pesanteur, ce corps est dans un état d'équilibre stable, tandis que le corps est à l'état d'équilibre instable lorsque la pesanteur agit dans le même sens que la force tendant à le déplacer.

Enfin, si pour tout déplacement du corps reposant sur un plan

un nombre de kilogrammes représenté par 5 935 735 566 338 215 901 202 500 ; nous prendrons pour simplifier nos calculs 5935×10^{21}.

Supposons maintenant que le point d'appui du levier soit seulement à 1 mètre de la terre et donnons à Archimède la force moyenne d'un homme, soit une force de 75 kilogrammes, en représentant par x la longueur du bras de levier à l'extrémité duquel il doit agir, on aura

$$x = \frac{1 \times 5935 \times 10^{21}}{75} = 79\,133\,333\,333\,333\,333\,333\,333 \text{ mètres.}$$

Or, si l'on observe que la distance du soleil à la terre est de 153 491 215 064 mètres, on voit que x vaut plus de 515 milliards de fois cette distance.

Si Archimède avait voulu déplacer la terre de 1 millimètre seulement, il aurait eu à déplacer l'extrémité de son bras de levier de 79 133 333 333 333 333 333 mètres, c'est-à-dire de plus de 19 783 333 milliards de lieues.

horizontal la distance de son centre de gravité au-dessus de ce plan reste invariable, le corps est dit en équilibre indifférent.

Un grand nombre de jouets mécaniques des plus simples nous offrent des applications de ce principe.

Bouteille magique (1). — Un de ces jouets très répandu consiste en une petite bouteille qui se tient toujours debout et qui ne se renverse que lorsqu'elle en reçoit l'ordre.

La bouteille en verre très mince ou en carton vernis est collée sur la section plane d'une demi-sphère solide (ou d'un petit segment de sphère). La distance au centre de la sphère du centre de gravité d'un hémisphère homogène est égale au 3/8 du rayon, et la masse de l'appareil est si faible comparativement à celle de l'hémisphère formant la base que le centre de gravité de tout le système peut être considéré comme coïncidant sensiblement avec celui de la demi-sphère.

Soient alors c le centre de l'hémisphère et G le centre de gravité de l'ensemble, si la bouteille est posée sur un plan horizontal, la droite Gc étant verticale, tout déplacement de l'appareil tend à élever G, et, par suite, l'équilibre est stable.

On peut aussi le montrer comme il suit : la bouteille légèrement inclinée est soumise à l'action de deux forces formant couple : la première qui est la réaction du plan d'appui est verticale, agit de bas en haut et passe par c ; la seconde également verticale appliquée en G est égale au poids du système et agit de haut en bas. Si G est situé au dessous de c, ce couple tend évidemment à ramener la bouteille dans sa position primitive.

Si maintenant on introduit dans la bouteille un grain de plomb ou seulement un clou assez lourd pour amener le centre de gravité de l'ensemble au-dessus de c, l'équilibre devient instable et si peu qu'on incline l'appareil, il achève de basculer et se couche sur la table.

(1) Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 15 ; édition de 1840, p. 201.

Montucla raconte que de son temps on vendait un jouet d'enfant consistant en une boite remplie de soldats d'étain fixés sur des hémisphères en plomb ; aussitôt qu'on enlevait le couvercle de la boîte, on voyait les petits soldats se dresser verticalement et menaçants.

La manière de faire tenir un crayon par la pointe sur le bout du doigt et en équilibre dans une position verticale est une application du même principe, l'expérience est décrite dans presque tous les livres de récréations (1). Voici comment on peut l'exécuter : on prend un canif dont on ouvre une lame de façon à former un angle assez grand (120° par exemple) et on pique la pointe de cette lame dans l'extrémité supérieure du crayon en disposant le manche en saillie en avant du doigt. Le centre de gravité de l'ensemble est alors au-dessous du point d'appui, et un petit déplacement du crayon ayant pour effet de l'élever, l'équilibre est stable.

Comme autre réaction du même genre, nous citerons (2), l'expérience du seau que l'on peut faire tenir en équilibre à l'extrémité d'un bâton reposant, par une certaine longueur, à l'autre extrémité, sur le bord d'une table. On se sert à cet effet d'un second bâton disposé transversalement, s'appuyant par un bout sur le fond intérieur du seau et par l'autre sur l'extrémité en saillie du bâton horizontal, de façon à déplacer le centre de gravité et à l'amener verticalement au-dessous de la partie qui repose sur la table. Qui ne connaît la jolie petite expérience de la pièce de 5 francs se tenant horizontalement en équilibre sur le bord d'un verre au moyen de deux fourchettes disposées de façon à former avec la pièce un système dont le centre de gravité est verticalement au-dessous du point d'appui.

Un autre jouet représente un cavalier qui se tient en équilibre sur le bord d'une table dans une position telle qu'il semblerait qu'à

(1) Oughtred. — *Mathematical Recreations*, p. 24. Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 14 ; édition de 1840, p. 200.

(2) Oughtred. — P. 30. Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 12 ; édition de 1840, p. 199.

chaque instant il va tomber. Un arc en fil de fer, fixé par l'une de ses extrémités aux pieds du cavalier, se termine à l'autre par une boule d'un certain poids. Lorsqu'on place le cheval de façon que ses pieds de derrière s'appuient sur le bord de la table, ses jambes de devant étant en l'air dans le vide, la petite masse pesante se trouve exactement au-dessous de la partie du bord de la table qui porte le coursier. Le tout constitue un ensemble dont le centre de gravité se trouve constamment au-dessous de la ligne d'appui et sur la verticale passant par cette ligne.

On vendait à Paris, en 1890, une élégante modification de ce jeu sous la forme d'un petit bonhomme en étain (1). Les cuisses étaient articulées au corps de façon à permettre le mouvement des jambes mais avec un arrêt en fil de fer pour limiter le déplacement ; quant aux mains, elles étaient fixées à la partie supérieure d'un ∩ renversé en fil de fer assez lourd. Cette figure posée sur une planchette horizontale assez étroite pour passer entre les branches du balancier sera, comme tous les équilibristes du même genre, dans une position d'équilibre stable puisqu'un léger déplacement latéral aura pour effet d'élever le centre de gravité du système. Pour faire marcher l'équilibriste on le place à la partie supérieure de la planchette légèrement inclinée en lui imprimant une secousse imperceptible dans le sens latéral ; cette secousse amplifiée par l'oscillation du balancier, fait pencher la figure alternativement à droite et à gauche. Supposons qu'elle penche à droite à un moment donné. Tout le poids du corps, c'est-à-dire du buste et du balancier, portera sur la jambe droite, et, le pied gauche n'appuyant plus sur la planchette, la jambe gauche sera projetée en avant par l'effet de la pesanteur : elle tendra à prendre la position verticale. A ce moment, l'oscillation contraire se produit, fait pencher le corps à gauche, appuyer le pied gauche sur la planchette, et le pied droit étant libre à son tour, c'est la jambe droite qui fait un pas en avant. En résumé, l'équilibriste descend le plan incliné d'un pas chancelant suivant les

(1) *La Nature*, Paris, janvier 1891.

oscillations latérales, ce qui produit un effet des plus curieux. La durée du mouvement est limitée par la longueur de la planchette.

Peu après la publication de la troisième édition de cet ouvrage, ce jouet fut fabriqué en Angleterre sous une autre forme : a l'équilibriste on substitua un éléphant fait d'un métal assez lourd et il est bien probable que ce nouveau modèle est bien connu aujourd'hui de tous ceux qui s'intéressent aux jouets marcheurs.

L'œuf de Colomb. — Le jouet connu sous le nom de l'œuf de Colomb est basé sur le même principe que celui de la bouteille magique, bien que l'effet produit soit l'inverse. L'enveloppe de l'œuf qui ne peut s'ouvrir est constituée par une feuille d'étain, à l'intérieur et à la partie inférieure est fixé un petit cône tronqué, creux, également en étain, enfin une bille ou une boule en bois d'un certain poids peut se déplacer à l'intérieur de l'œuf. Quand on prend l'œuf d'une certaine manière, la bille s'introduit dans le tronc de cône, et on peut alors le placer en équilibre sur sa pointe, mais tant que la bille se déplace en dehors du cône, l'œuf roule sur la table.

Expérience du double cône remontant le plan incliné ([1]). — Cette expérience repose encore sur la tendance qu'éprouve tout système pesant à se placer de telle sorte que le centre de gravité soit le plus bas possible.

Voici comment on la présente le plus généralement. Avec deux tringles en bois on forme un V dont on place la pointe sur une table et les deux extrémités libres sur le dos d'un livre placé debout et de hauteur convenable. On réunit par les bases deux cônes égaux et on pose le double cône ainsi construit sur les tringles et dans le voisinage de la pointe du V, de façon à ce qu'il s'appuie par sa surface courbe, l'axe commun étant horizontal et parallèle au dos du livre. Si alors la hauteur du livre a été choisie convenablement par

([1]) Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 49; édition de 1840, p. 216.

rapport au diamètre de base des cônes, on voit le corps remonter entre les branches du V.

Le centre de gravité du système se déplace dans le plan vertical bissecteur de l'angle au sommet du V et la hauteur du livre est choisie de telle sorte que plus les points de contact de la surface du double cône avec les branches s'écartent l'un de l'autre, plus le centre de gravité est bas, il en résulte nécessairement que le double cône fait l'ascension du plan incliné puisque le centre de gravité tend toujours à descendre.

Mouvement perpétuel. — L'idée de construire une machine qui, une fois mise en mouvement par une première impulsion, non seulement pourrait se mouvoir d'elle-même sans le secours d'aucune force extérieure, mais encore serait capable de produire un effet util n'est jamais sortie que du cerveau d'un mécanicien peu expérimenté et sans connaissances sérieuses, de même que la recherche de la quadrature du cercle a toujours dénoté peu de savoir chez un mathématicien.

Il faut observer que la signification évidente de la 3me loi du mouvement est, que toute force n'est seulement qu'un aspect d'un ensemble d'efforts, et que chaque fois qu'une force entre en jeu, une autre égale et opposée prend naissance, pouvant bien entendu agir sur un corps différent et être ainsi sans importance pour le problème particulier considéré.

La loi est cependant susceptible d'une autre interprétation (1), à savoir, que l'intensité suivant laquelle un agent travaille (c'est-à-dire son action), est égale à l'intensité de la résistance offerte au travail (c'est-à-dire la réaction). Si on est autorisé à comprendre dans la réaction l'intensité suivant laquelle s'exerce l'énergie cinétique et si le travail comporte celui qui agit contre les forces moléculaires, alors il découle de cette interprétation que le travail exécuté par un agent sur un système est équivalent à l'accroissement total d'é-

(1) *Principia* de NEWTON, dernier paragraphe du scholie aux lois du mouvement.

nergie, c'est-à-dire à la puissance de faire le travail. Il résulte de là que dans un système isolé le montant total d'énergie est constant.

Si ceci est admis, alors puisqu'on ne peut pas éliminer complètement le frottement, ni éviter quelques pertes moléculaires d'énergie, il est impossible de construire dans un système isolé une machine capable du mouvement perpétuel.

Nous n'avons pas l'intention de décrire toutes les machines imaginées pour produire le mouvement perpétuel, qu'il nous suffise de faire remarquer que la plupart d'entr'elles diffèrent peu de celle dont nous donnons une idée ci-après.

Cette machine consiste essentiellement en deux roues concentriques montées verticalement sur le même axe horizontal passant par le centre *c*. L'espace annulaire entre les circonférences des roues est divisé en un certain nombre de compartiments par des cloisons inclinées dans le même sens, et formant un angle constant avec les divers rayons aboutissant aux points d'où elles partent sur la circonférence intérieure.

Chacun de ces compartiments contient une petite boule pesante et le système, considéré sans les boules, est à l'état d'équilibre indifférent. Les boules tendent à faire tourner les roues autour de l'axe commun, et cette tendance est mesurée par la somme algébrique des moments des diverses forces composantes, c'est-à-dire par le produit du poids constant d'une boule par la somme algébrique des distances de chacune d'elles à la verticale passant par le centre *c*.

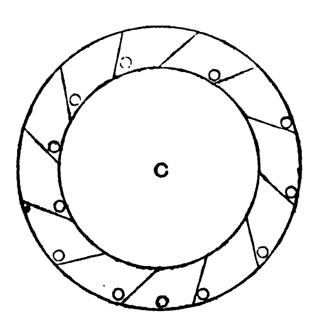


Fig. 39.

L'idée qui guidait les constructeurs de cette machine était que, puisque dans chaque compartiment la boule roule, en vertu de son poids, vers le point le plus bas, les boules situées du côté droit de la figure seraient à un certain moment, plus éloignées de la verticale

passant par le centre que celles du côté gauche. Par suite la somme des moments des premières serait à ce moment plus grande que celle des dernières et le système des deux roues tournerait constamment dans le sens des aiguilles d'une montre. L'erreur de raisonnement est trop manifeste pour que nous nous y arrêtions.

Un autre groupe de machines reposait sur l'emploi d'un aimant qui soulevait une masse pesante à une certaine hauteur pour l'abandonner ensuite à l'action de son poids. On pensait ainsi qu'en fixant un aimant dans le voisinage du point le plus haut que peut atteindre un pendule dans ses oscillations, une lentille en fer adaptée à l'extrémité de la tige serait attirée jusqu'à ce point puis retomberait pour remonter et produire un mouvement perpétuel.

Ce n'est bien entendu que dans les systèmes isolés que la somme totale d'énergie est constante, et s'il est possible de trouver une source extérieure d'énergie au moyen de laquelle on introduit continuellement dans le système une certaine quantité d'énergie le mouvement perpétuel est, dans un sens, possible, abstraction faite, bien entendu, de l'usure inévitable des matériaux entrant dans la composition de la machine. La chaleur solaire et les cours d'eau sont des sources inépuisables d'énergie toutes trouvées.

Il existait à Paris, dans la dernière moitié du siècle passé, une horloge présentant une ingénieuse application d'un tel mouvement perpétuel [1].

Le mouvement du pendule était produit par la dilatation d'une tringle d'argent, dilatation provenant de l'élévation journalière de la température ambiante. Au moyen d'un système de leviers dépendant les uns des autres, l'horloge se trouvait montée. Un appareil spécial de désembrayage prévenait les effets produits par un abaissement de température et une disposition du même genre servait de cran d'arrêt. Nous pensons qu'une élévation de température de 4 à 5° (centigrades) était suffisante pour monter l'horloge pour vingt-quatre heures.

[1] Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 105 ; édition de 1840, p. 238.

Nous possédons une montre dans laquelle le même effet est porduit d'une façon un peu différente. Dans le boîtier se trouve un petit poids d'acier et quand on met la montre dans la poche, ce poids s'élève et tombe à chaque pas que l'on fait, produisant ainsi à peu près l'effet d'un compteur. L'ascension du poids est produite par le mouvement de la personne en marche et en descendant il fait enrouler le ressort de la montre. Un petit cadran porte le nombre des heures pendant lesquelles la montre peut marcher. Aussitôt que 'aiguille du cadran marque cinquante-six heures, le système de levier qui fait marcher la montre désembraye automatiquement pour éviter de forcer le ressort et recommence à fonctionner quand la montre a marché pendant huit heures.

Cet appareil constitue un excellent chronomètre et une marche de 3 kilomètres environ suffit pour le monter pour vingt-quatre heures.

Modèle. — Nous ferons ici une observation, qui n'est certainement pas nouvelle pour les mathématiciens, mais qui est cependant une cause perpétuelle de désappointement pour beaucoup d'inventeurs peu instruits. Elle est relative à un fait se produisant souvent : un modèle de machine exécuté soigneusement peut fonctionner fort convenablement et la machine elle-même, construite d'après ce modèle, ne pas fonctionner.

En voici une des raisons : si toutes les dimensions linéaires du modèle sont agrandies dans la même proportion, c'est-à-dire, sont rendues, par exemple, m fois plus grandes, les surfaces et les volumes de chacune de ces parties seront respectivement amplifiés dans le rapport m^2 à 1 et de m^3 à 1. En particulier, si on double le côté d'un cube, chaque surface devient quatre fois plus grande et le cube est rendu huit fois plus grand.

Or, par le fait de l'accroissement dans le rapport de m à 1 de tous les éléments linéaires du modèle, plusieurs forces agissant sur la machine (telles, par exemple, que le poids de certains organes) deviennent m^3 fois plus grandes, tandis que d'autres qui dépendent

de l'étendue superficielle des organes considérés (comme, par exemple, la puissance d'un balancier) deviennent m^2 fois plus grandes. Par suite, les forces qui agissent et qui entrent en jeu différemment, suivant les parties de la machine, sont altérées dans des proportions variables; la machine est incapable de produire des résultats semblables à ceux qu'on en espérait d'après ceux obtenus avec le modèle.

Le même raisonnement s'applique au cas des animaux pour expliquer la faiblesse que l'on observe chez des produits de chaque espèce ou de chaque race présentant un développement physique exagéré.

Par exemple, si les dimensions linéaires d'un oiseau étaient rendues n fois plus grandes, le travail mécanique à développer, pour lui permettre de prendre son vol, devrait être rendu au moins n^7 fois plus grand (1). De même, si tous les éléments linéaires qui entrent dans la composition du corps d'un homme de 5 pieds 10 pouces étaient augmentés seulement de $\frac{1}{7}$, sa hauteur deviendrait égale à 6 pieds 8 pouces, mais son poids serait augmenté dans le rapport de 512 à 343 (c'est-à-dire deviendrait presque le double de ce qu'il était). Les sections transversales des jambes qui ont à supporter ce poids seraient accrues seulement dans le rapport de 64 à 49, de sorte qu'à un certain point de vue, cet homme transformé serait moins vigoureux que primitivement. Mais, bien entendu, l'accroissement de certaines dimensions : longueur des membres ou volume des muscles, peut présenter des avantages plus grands que la perte relative de force.

En résumé, le problème, comme on le voit, est loin d'être simple, mais ces quelques explications suffisent pour justifier ce que nous avancions plus haut : que le travail d'une machine construite d'après un modèle n'est pas toujours identique à celui du modèle.

Abandonnons maintenant ces considérations élémentaires pour examiner quelques autres questions mécaniques.

(1) Helmholtz. — *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, 1881, vol. I, p. 165.

Naviguer plus vite que le vent. — Comme exemple de paradoxe cinématique nous allons montrer qu'il est possible de *naviguer plus vite que le vent souffle*, phénomène qui excitera certainement la curiosité de bien des personnes.

L'explication (¹) repose évidemment sur le rapport qui doit exister entre la vitesse du vent et celle du navire ; elle sera rendue plus simple et plus claire en considérant : 1° l'effet de la pression du vent sur la voile (qui pousse le navire en avant) et 2° l'effet de la résistance que l'air oppose au passage de la voile.

Quand le vent vient frapper une voile plane, la pression résultante peut se décomposer en deux forces, l'une perpendiculaire au plan de la voile (qui, généralement, n'est pas fonction unique de la vitesse composante dans cette direction, bien que l'une ne puisse s'annuler sans l'autre) et l'autre parallèle au plan de la voile. Cette dernière n'influe en rien sur la marche du navire que la composante perpendiculaire à la voile tend au contraire à entraîner dans sa direction.

La pression normale à la voile peut à son tour se décomposer en deux forces, l'une agissant suivant la direction de la quille du navire et l'autre dans la direction des baux, c'est-à-dire perpendiculaire à la quille. La première pousse le navire en avant et la seconde l'entraîne sous le vent.

Les constructeurs de navires s'efforcent de leur donner des lignes telles que la résistance de l'eau au mouvement en avant soit la plus petite possible, et la résistance dans une direction perpendiculaire la plus grande possible; nous supposerons pour le moment que la première peut être négligée et que la seconde est suffisamment grande pour s'opposer à tout déplacement du navire dans cette direction.

Considérons maintenant le navire en mouvement, la pression de l'air sur la face avant de la voile tend à retarder la marche. Tant

(¹) Ozanam. — Édition de 1803, vol. III, pp. 359, 367 ; édition de 1840 pp. 540, 543.

La seconde loi nous donne le moyen de mesurer les masses, les forces et, par suite « le travail ».

Un agent mécanique donné ne peut produire dans un temps déterminé qu'une quantité finie de travail. S'il est théoriquement exact qu'avec un levier rigide et un point d'appui, une force, si petite qu'elle soit, puisse déplacer une masse quelconque, si grande qu'elle soit, il n'en est pas moins vrai que ce qui est gagné en puissance est perdu en chemin parcouru. C'est une vérité rendue universelle par l'expérience de tous les jours.

Montucla (2) a donné un exemple frappant de ce principe basé sur 'anecdote bien connue d'Archimède déclarant à Hiéron qu'il lui serait possible de soulever le monde si on lui donnait un point d'appui.

Montucla a calculé le poids du globe terrestre et partant de ce fait que le travail journalier d'un homme était de 15 kilogrammes par seconde (ce qui est une estimation très élevée) il est arrivé à ce résultat qu'il faudrait environ 3 milliards de siècles, c'est-à-dire 3×10^{14} années pour soulever de près de $0^{m}03$ une masse égale à celle du globe; pour déplacer de 3 centimètres une pareille masse sur un plan horizontal, il faudrait 74,000 siècles (1).

par les écuyers dans un cirque; la description du chemin de fer aérien de Clavière; l'explication de la rupture de meules, de volants; l'application aux essoreuses destinées à sécher mécaniquement le linge mouillé dans les lavoirs, etc., etc.

(1) Ozanam. — Edition de 1803. Vol. II, p. 18; édition de 1840, p. 202.

(2) La question peut être envisagée à un autre point de vue également intéressant.

La terre est un ellipsoïde de révolution dont le grand axe = 12754796 mètres et le petit axe = 12712160 mètres.

$$\text{Son volume} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{12754796}{2} \times \frac{12712160^2}{4}$$
$$= 1079224648425130163855 \text{ mètres cubes.}$$

Or, la densité moyenne de la terre = 5,50, ce qui donne pour son poids

Equilibre. — Tous ceux qui ont la moindre notion de mécanique savent que lorsqu'un corps est en équilibre sous l'influence de son seul poids, la verticale du centre de gravité tombe à l'intérieur de la base de sustentation ou passe par l'axe de suspension, suivant que le corps repose sur un plan horizontal ou est soutenu par un axe horizontal.

On peut énoncer d'une manière générale les conditions pour qu'un système pesant soit en équilibre stable ou en équilibre instable. Dans le cas de l'équilibre stable la hauteur du centre de gravité est un *minimum* par rapport aux positions voisines que prend le système quand on le dérange un peu de l'équilibre, elle est un *maximum* dans le cas de l'équilibre instable. Cela tient à ce que *le centre de gravité tend toujours à descendre*. En d'autres termes, si, pour produire le déplacement d'un corps, on est obligé de développer un certain travail afin de contrebalancer l'action de la pesanteur, ce corps est dans un état d'équilibre stable, tandis que le corps est à l'état d'équilibre instable lorsque la pesanteur agit dans le même sens que la force tendant à le déplacer.

Enfin, si pour tout déplacement du corps reposant sur un plan

un nombre de kilogrammes représenté par 5935735566338215901202500; nous prendrons pour simplifier nos calculs 5935×10^{21}.

Supposons maintenant que le point d'appui du levier soit seulement à 1 mètre de la terre et donnons à Archimède la force moyenne d'un homme, soit une force de 75 kilogrammes, en représentant par x la longueur du bras de levier à l'extrémité duquel il doit agir, on aura

$$x = \frac{1 \times 5935 \times 10^{21}}{75} = 79133333333333333333333 \text{ mètres.}$$

Or, si l'on observe que la distance du soleil à la terre est de 153491215064 mètres, on voit que x vaut plus de 515 milliards de fois cette distance.

Si Archimède avait voulu déplacer la terre de 1 millimètre seulement, il aurait eu à déplacer l'extrémité de son bras de levier de 79133333333333333 mètres, c'est-à-dire de plus de 19783333 milliards de lieues.

horizontal la distance de son centre de gravité au-dessus de ce plan reste invariable, le corps est dit en équilibre indifférent.

Un grand nombre de jouets mécaniques des plus simples nous offrent des applications de ce principe.

Bouteille magique (1). — Un de ces jouets très répandu consiste en une petite bouteille qui se tient toujours debout et qui ne se renverse que lorsqu'elle en reçoit l'ordre.

La bouteille en verre très mince ou en carton vernis est collée sur la section plane d'une demi-sphère solide (ou d'un petit segment de sphère). La distance au centre de la sphère du centre de gravité d'un hémisphère homogène est égale au 3/8 du rayon, et la masse de l'appareil est si faible comparativement à celle de l'hémisphère formant la base que le centre de gravité de tout le système peut être considéré comme coïncidant sensiblement avec celui de la demi-sphère.

Soient alors c le centre de l'hémisphère et G le centre de gravité de l'ensemble, si la bouteille est posée sur un plan horizontal, la droite Gc étant verticale, tout déplacement de l'appareil tend à élever G, et, par suite, l'équilibre est stable.

On peut aussi le montrer comme il suit : la bouteille légèrement inclinée est soumise à l'action de deux forces formant couple : la première qui est la réaction du plan d'appui est verticale, agit de bas en haut et passe par c ; la seconde également verticale appliquée en G est égale au poids du système et agit de haut en bas. Si G est situé au dessous de c, ce couple tend évidemment à ramener la bouteille dans sa position primitive.

Si maintenant on introduit dans la bouteille un grain de plomb ou seulement un clou assez lourd pour amener le centre de gravité de l'ensemble au-dessus de c, l'équilibre devient instable et si peu qu'on incline l'appareil, il achève de basculer et se couche sur la table.

(1) Ozanam. — Édition de 1803, vol. II, p. 15 ; édition de 1840, p. 201.

Montucla raconte que de son temps on vendait un jouet d'enfant consistant en une boite remplie de soldats d'étain fixés sur des hémisphères en plomb ; aussitôt qu'on enlevait le couvercle de la boîte, on voyait les petits soldats se dresser verticalement et menaçants.

La manière de faire tenir un crayon par la pointe sur le bout du doigt et en équilibre dans une position verticale est une application du même principe, l'expérience est décrite dans presque tous les livres de récréations (1). Voici comment on peut l'exécuter : on prend un canif dont on ouvre une lame de façon à former un angle assez grand (120° par exemple) et on pique la pointe de cette lame dans l'extrémité supérieure du crayon en disposant le manche en saillie en avant du doigt. Le centre de gravité de l'ensemble est alors au-dessous du point d'appui, et un petit déplacement du crayon ayant pour effet de l'élever, l'équilibre est stable.

Comme autre réaction du même genre, nous citerons (2), l'expérience du seau que l'on peut faire tenir en équilibre à l'extrémité d'un bâton reposant, par une certaine longueur, à l'autre extrémité, sur le bord d'une table. On se sert à cet effet d'un second bâton disposé transversalement, s'appuyant par un bout sur le fond intérieur du seau et par l'autre sur l'extrémité en saillie du bâton horizontal, de façon à déplacer le centre de gravité et à l'amener verticalement au-dessous de la partie qui repose sur la table. Qui ne connaît la jolie petite expérience de la pièce de 5 francs se tenant horizontalement en équilibre sur le bord d'un verre au moyen de deux fourchettes disposées de façon à former avec la pièce un système dont le centre de gravité est verticalement au-dessous du point d'appui.

Un autre jouet représente un cavalier qui se tient en équilibre sur le bord d'une table dans une position telle qu'il semblerait qu'à

(1) OUGHTRED. — *Mathematical Recreations*, p. 24. OZANAM. — Édition de 1803, vol. II, p. 14 ; édition de 1840, p. 200.

(2) OUGHTRED. — P. 30. OZANAM. — Édition de 1803, vol. II, p. 12 ; édition de 1840, p. 199.

celui du bateau, mais ce n'est pas le cas pour un mouvement d'impulsion, et si l'équipe, en donnant une série de coups saccadés, déplace en avant son centre de gravité n fois plus rapidement qu'en revenant à la position normale, chaque coup une fois donné, l'impulsion en avant communiquée au bateau est au moins n fois plus grande que celle en arrière, d'où résulte un mouvement en avant ([1]).

Mouvement des fluides et mouvement dans les fluides. — La théorie du mouvement des fluides et du mouvement dans les fluides présente de grandes difficultés. Nous ne mentionnerons ici que deux ou trois applications de la loi d'Hauksbee.

Loi d'Hauksbee. — Lorsqu'un fluide est animé d'un mouvement rapide la pression qu'il exerce est moindre que lorsqu'il est à l'état de repos ([2]). Ainsi, lorsqu'un courant d'air se produit dans un tube, la pression sur les parois est plus petite que lorsque la colonne d'air est au repos, et cette pression varie en raison inverse de la vitesse.

Ce fait a été signalé par Hauksbee il y a près de deux siècles.

Dans un fluide d'une élasticité parfaite dans lequel la pression est proportionnelle à la densité, la loi reliant la pression p à la vitesse constante v, est représentée par l'équation $p = \pi\alpha^{-v^2}$ dans laquelle π et α sont des quantités constantes.

Les formules correspondantes pour les gaz où la pression est pro-

([1]) On peut encore faire remarquer qu'il est possible de mettre un bateau en mouvement sur une eau tranquille en lui imprimant un balancement régulier d'avant en arrière, mais un peu plus accentué sur l'arrière. C'est une application du principe de la réaction égale et opposée à l'action.

([2]) Besant. — *Hydromechanics*, Cambridge, 1867, art. 149; dans cet ouvrage le principe de la proportionnalité de la pression à la densité est énoncée. Hauksbee est l'auteur le plus ancien qui appela l'attention sur le problème, mais nous ne savons pas quel est celui qui le premier donna une explication du phénomène. Willis en dit quelques mots dans *Cambridge Philosophical Transactions*, 1830, vol. III, pp. 129-140.

portionnelle à une certaine puissance de la densité, s'établissent sans difficulté.

L'expérience dite « du mystère pneumatique » s'explique au moyen du principe précédent. C'est un instrument que l'on trouve chez presque tous les marchands de jouets et qui consiste en un tube muni d'une embouchure à l'une de ses extrémités et terminé à l'autre par une coupe évasée en forme de calice contenant une petite boule en bois. Ce tube étant tenu dans une position verticale avec la coupe en bas, on souffle fortement par l'embouchure en plaçant la boule à l'ouverture de la coupe, on constate alors que la boule se maintient suspendue dans la coupe. L'explication est très simple : la pression de l'air sous la boule est bien supérieure à celle de l'air dans le tube et la différence de ces deux pressions est assez grande pour soulever la boule.

On produit le même effet en fixant à l'ouverture inférieure d'un tube un petit morceau de carton percé d'un trou central et sous lequel on place une rondelle de papier, en soufflant par l'autre extrémité dans le tube, la rondelle de papier ne se détache pas du carton, mais elle se plie pour permettre la sortie du courant d'air.

Une autre expérience exactement du même genre se trouve décrite dans la plupart des ouvrages sur l'hydrodynamique des gaz. On place à l'une des extrémités d'un tube droit un disque plan pouvant glisser sur de petits fils de fer fixés dans le prolongement rectiligne du tube. Le disque étant à une petite distance de l'extrémité, on souffle avec force, mais d'une façon continue, dans le tube et on constate que le disque n'est pas projeté hors des fils, mais est attiré vers l'ouverture en oscillant autour d'une position voisine de cette extrémité.

Voici la même expérience sous une autre forme : on place à plat sur une table deux livres dont les dos sont parallèles et espacés de 2 à 3 centimètres ; ce vide est couvert par une feuille de papier ou un morceau de journal, et en soufflant vigoureusement dans le petit tunnel ainsi formé, on constate que le papier est aspiré au lieu d'être projeté en l'air.

La dernière expérience qui suit s'explique d'une façon identique : Sur la pointe d'un axe vertical on fixe une petite tige très légère pouvant pivoter dans un plan horizontal et dont chacune des extrémités porte un petit carré vertical ou une sorte de petite voile en carton mince ; les deux voiles sont d'ailleurs dans un même plan. Si maintenant on provoque un courant d'air en soufflant dans le voisinage de l'un de ces carrés, mais dans une direction parallèle à leur plan, on constate que ce carré se déplace vers le côté où le courant d'air se produit, et la tige avec ses deux petites ailes prend un mouvement de rotation.

Les expériences que nous venons de décrire peuvent être réalisées de façon à justifier la loi d'Hauksbee en prenant certaines précautions, car d'autres causes étrangères interviennent, qui peuvent modifier les phénomènes, mais il est inutile d'entrer ici dans tous ces détails.

La balle du Tennis. — Tous les joueurs de tennis et de raquette connaissent l'effet que nous allons signaler : une balle frappée vigoureusement peut aller rebondir sur un mur, puis (sans toucher le sol ou un autre mur), revenir sur elle-même et heurter une seconde fois le mur.

C'est une nouvelle application de la loi d'Hauksbee. En voici l'explication [1] : le coup donné sur la balle lui imprime un mouvement de rotation rapide autour d'un axe passant par son centre de figure en même temps qu'un mouvement de propulsion, et le frottement de la surface de la balle contre l'air ambiant produit une sorte de tourbillon.

Considérons, par exemple, une balle sphérique animée d'un mouvement de rotations dans le sens de la flèche autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire au plan de la figure, elle

(1) Voir Magnus sur *Die Abweichung der Geschœsse* dans le *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1852, pp. 1-23. Lord Rayleigh. — *On the irregular flight of a tennis ball*, *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1878, vol. VII, pp. 14-16.

se déplace en même temps de gauche à droite parallèlement à la direction PQ dans un milieu en repos. Tout déplacement de la balle dans un sens perpendiculaire à PQ est produit par la pression de l'air sur la surface, et, d'après la loi d'Hauksbee, cette pression est d'autant plus grande que la vitesse de l'air est faible par rapport à celle de la balle, et *vice versa*. Pour déterminer la vitesse de l'air relativement à celle de la balle, nous pouvons considérer le centre de cette dernière comme fixe, et supposer un courant d'air venant frapper la surface de la balle avec une vitesse égale et contraire à celle que possède son centre. Or, les couches d'air en contact avec la surface de la balle sont entraînées dans le mouvement de rotation de celle-ci en formant un tourbillon tournant dans le sens de la flèche. Examinons comment le mouvement provoqué par le tourbillon est affecté par le mouvement du courant dans le sens QP. En A, l'air dans le tourbillon se déplace contre le courant et, par suite, sa vitesse est retardée ; en B, l'air dans le tourbillon se déplace dans le même sens que le courant et, par suite, la vitesse est augmentée. Dès lors, la vitesse relative de l'air est moindre en A qu'en B et par suite, la pression de l'air sur la surface de la balle est plus grande en A qu'en B. Ainsi, la balle est poussée par cette pression dans une direction l'éloignant de la ligne PQ qui peut être considérée comme représentant la section d'un mur vertical limitant l'espace réservé au jeu. En d'autres termes, la balle tend à se mouvoir transversalement à la ligne que décrit son centre et dans la direction suivant laquelle elle tourne.

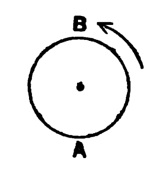


Fig. 42.

Dans le cas d'une balle de tennis, la forme de la balle étant modifiée par un coup vigoureux, il en résulte quelques complications dont il y a lieu de tenir compte dans l'explication du phénomène. Les questions traitées comme des applications de la loi d'Hauksbee sont simples comparativement à plusieurs autres problèmes sur le mouvement des corps dans les milieux fluides. L'étude de beaucoup

de ces questions conduit à des calculs d'analyse algébrique qui ne peuvent figurer dans un pareil livre ; nous consacrerons cependant quelques lignes à l'une d'elles qui n'a pas encore été complètement élucidée.

Théorie du vol des oiseaux. — Un problème de mécanique qui présente un grand intérêt est celui qui consiste à expliquer comment il se fait que les oiseaux peuvent parcourir des distances considérables dans les airs sans que leurs ailes fassent le moindre mouvement (tout au moins apparent). Pour ne citer qu'un exemple, particulièrement remarquable, on a vu des albatros suivre pendant plusieurs jours des vaisseaux marchant à neuf et dix nœuds à l'heure, et souvent, pendant un temps considérable, et on n'observe aucun mouvement, soit des ailes, soit du corps. D'ailleurs, lors même que l'oiseau remuerait ses ailes, on comprend difficilement comment il peut développer une énergie musculaire assez grande pour se déplacer dans les airs si rapidement et si longtemps.

On a présenté plusieurs explications du phénomène (1) parmi lesquelles les plus plausibles sont : celle des courants supérieurs de M. Maxim, celle présentée par Lord Rayleigh relativement aux variations de la vitesse du vent suivant l'altitude, celle du Dr S. P. Langley supposant l'existence d'une série non interrompue de rafales et d'accalmies alternées, et enfin la théorie des tourbillons atmosphériques du Dr Bryan.

Il paraît aujourd'hui raisonnable d'admettre que la seconde et la troisième de ces sources d'énergie contribuent, en partie tout au moins, au phénomène observé. L'effet de la troisième cause se comprend en partie en remarquant que le centre de gravité de l'oiseau ayant ses ailes déployées est un peu au-dessous de son plan de vol, c'est-à-dire du plan de ses ailes, de telle sorte que l'ensemble constitue une sorte de parachute. Un brusque coup de

(1) Voir G.-H. Bryan dans *The Transactions of the British association* pour 1896. Vol. LXVI, pp. 726-728.



vent sur un tel corps a pour effet d'imprimer à la couche d'air dans laquelle plane l'oiseau une vitesse plus grande que celle de la masse en suspension qui forcée de s'élever, reçoit ainsi le vent de l'autre côté, de sorte que la force ascensionnelle de l'oiseau est augmentée. Quant le vent tombe, la masse plus considérable du corps de l'oiseau continue son mouvement en vertu du principe de l'inertie, de telle sorte que le plan des ailes est encore en contact par sa face inférieure avec la couche d'air calme ; et si, pendant que le parachute est dans cette position, une nouvelle saute de vent vient à se produire, la masse en suspension est encore entraînée de bas en haut ; ainsi plus l'oiseau s'avance et plus il s'élève dans les airs. Il résulterait de cette théorie que les oiseaux dans leur vol sont entraînés par de subits coups de vent. Par le fait même que l'oiseau est en mouvement il tend à se maintenir en l'air ; car on a récemment montré qu'une surface plane tombe plus lentement sous l'action de la gravité lorsqu'elle est lancée horizontalement à travers l'espace avec une certaine force, que lorsque la chute s'effectue directement suivant la verticale. Par suite, entre deux coups de vent successifs, les oiseaux en mouvement dans les airs descendent verticalement d'une quantité plus petite que celle dont ils tomberaient dans le cas d'un vent calme. Bien plus, des expériences récentes ont montré que le travail mécanique nécessaire pour supporter, au moyen d'un aéro-plan un corps se déplaçant horizontalement diminuait avec l'altitude ; par conséquent, lorsque l'oiseau reçoit du vent une impulsion transversale (c'est-à-dire faisant un angle droit avec sa direction première) sa force ascensionnelle est augmentée en proportion de sa vitesse propulsive initiale.

Curiosités physiques. — Lors de la préparation de la première édition de cet ouvrage nous avions réservé un chapitre faisant suite à celui-ci et consacré à quelques questions du ressort de la physique.

Par exemple, dans la théorie de l'acoustique, nous donnions l'explication d'un phénomène observé par le capitaine Parry et relatif

à la vitesse dans l'air du bruit produit par un coup de canon et du son de la voix humaine, le premier était perçu avant que le commandement de faire feu parvint à l'oreille de l'observateur [1]. Dans la théorie cinétique des gaz nous signalions les perturbations que pourrait produire dans l'univers « l'esprit de Maxwell » [2]. Comme questions d'optique, nous donnions l'explication « des miroirs magiques » japonais [3] réfléchissant l'image sur la face arrière (qui n'est pas éclairée). Nous aurions pu y ajouter la curieuse expérience de la « Toupie spectre » avec laquelle une surface blanche sur laquelle on a tracé quelques traits en noir peut être mise en mouvement de façon à donner l'impression de lignes coloriées en rouge, vert, bleu, gris, brun [4] en citant ce fait, non moins curieux, que la couleur change suivant le sens de la rotation. On a également montré tout récemment (ce qui peut-être avait déjà été remarqué un peu partout) que si deux séries d'ondes, dont les longueurs sont dans le rapport de $m - 1$ à $m + 1$ se superposent, la m^{ieme} onde de chaque système est la plus grande. L'opinion généralement répandue que chaque neuvième vague dans la mer est plus forte que les autres, serait donc ainsi vérifiée scientifiquement.

Les phénomènes curieux et intéressants ne manquent pas en physique ; l'électricité et le magnétisme, en particulieer, en sont des

(1) Le fait est absolument authentique. M. Earnshaw (*Philosophical Transactions*. Londres, 1860. pp. 133-148) l'a expliqué par l'accélération de l'onde provoquée par la formation d'une sorte de trou dans l'air ; cette explication a été acceptée par Clerk Maxwell et plusieurs autres physiciens, mais Sir George Airy pensait que le phénomène dépendait de la physiologie ; voir *Le Son* d'Airy, seconde édition, Londres, 1871, pp. 141-142.

(2) J. Clerk Maxwel. — *Théorie de la chaleur*, seconde édition, Londres, 1872, p. 308.

(3) Voir un mémoire de W.-E. Ayrton et J. Perry. — *Proceedings of the Royal Society of London*, partie I, 1879, vol. XXVIII, pp. 127-148.

(4) Voir les lettres de M. C.-E. Benham et autres dans le journal *Nature*, 1894-5 ; et un mémoire du Prof. Liveing, *Cambridge Philosophical Society*, 26 novembre 1894.

sources inépuisables ; la difficulté est d'en faire un choix judicieux. Nous avons pensé que le sujet était en dehors de notre programme et trop technique pour être traité dans un ouvrage spécialement consacré à des récréations mathématiques. En conséquence, nous avons préféré laisser de côté le chapitre dans lequel nous avions réuni toutes ces questions. Si nous mentionnons le fait, c'est d'abord parce que nous avons l'espoir qu'un physicien publiera un jour un ouvrage dans lequel toutes les questions de cette nature seront traitées et ensuite, pour les rappeler à ceux que les études de ce genre intéresseraient.

CHAPITRE VII

QUESTIONS DIVERSES

Nous nous proposons dans ce chapitre de discuter la théorie mathématique d'un certain nombre de jeux et amusements choisis parmi les plus connus. Nous aurions pu traiter quelques-uns d'entre eux dans les chapitres précédents, mais comme nous faisons intervenir, pour plusieurs, soit alternativement, soit à la fois la géométrie et l'algèbre, nous avons pensé qu'il serait plus convenable pour notre exposition de les grouper à part. Cette division d'ailleurs est absolument conventionnelle et n'a rien d'absolu ; en l'adoptant nous avons été guidé par notre simple convenance plutôt que par la logique.

La majeure partie des questions énumérées ci-après n'ont aucune connexité, elles sont présentées un peu au hasard.

Nous traiterons successivement le *Jeu des quinze*, la *Tour d'Hanoï*, *Les anneaux chinois*, le *Problème des huit reines*, le *Problème des quinze écolières*, et enfin quelques récréations ou problèmes pouvant se faire avec un jeu de cartes.

Le jeux des quinze (1). — Il y a dix ou douze ans, on trouvait communément chez tous les marchands de jouets un jeu connu sous le nom de « jeu des quinze ». Il consistait en une boîte carrée

(1) On trouvera deux articles sur ce sujet dans l'*American Journal of Mathematics*, 1879, vol. II, par les Prof. Woolsey Johnson et Story ; mais la théorie du jeu se déduit immédiatement de la proposition donnée plus loin dans le texte.

en bois, peu profonde (dont le haut était marqué d'une certaine façon) renfermant quinze cubes ou quinze jetons carrés numérotés de un à quinze. La boîte pouvait contenir exactement seize de ces cubes ou jetons, et, par suite, les quinze qui s'y trouvaient étaient susceptibles d'être déplacés successivement dans la boîte en utilisant le vide.

Au début les quinze numéros sont disposés dans un ordre quelconque avec la seizième et dernière case vide, le jeu consiste à les déplacer de façon à leur faire prendre finalement la position indiquée dans la figure 43.

Nous pouvons suivre les diverses phases du jeu en supposant que l'espace libre, formant la seizième case, soit déplacé sur le tableau pour revenir à la case d'où on est parti.

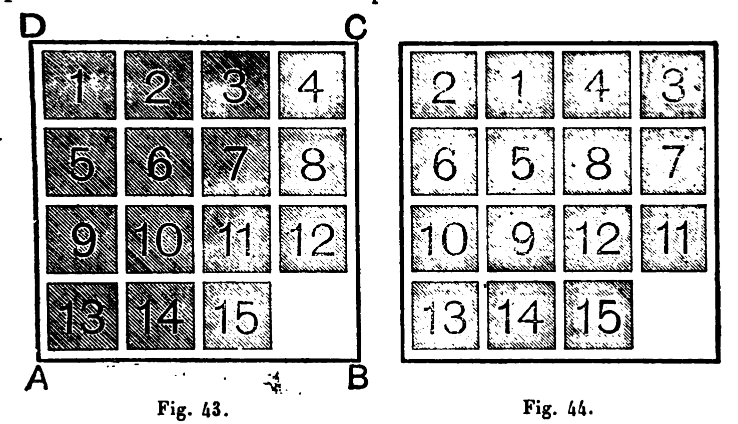


Fig. 43. Fig. 44.

La route suivie par l'espace libre, ainsi matérialisé, consiste : 1° en pas, allé et retour (qui n'ont aucune influence sur l'arrangement cherché), et 2° en chemins fermés parcourus en rond (qui représentent nécessairement des permutations circulaires d'un nombre impair de jetons). Aucun autre mouvement n'est possible.

Mais une permutation circulaire de n lettres est équivalente à $n - 1$ inversions simples ; par suite une permutation circulaire

impaire équivaut à un nombre pair d'inversions simples. Dès lors, en déplaçant les jetons de façon à ramener l'espace libre sur la seizième case, le nouvel ordre des numéros diffère de l'ordre primitif par un nombre pair d'inversions simples. Il en résulte que si la disposition demandée ne peut se déduire de la disposition primitive qu'en effectuant un nombre impair d'inversions, le problème n'est pas possible ; il est possible au contraire lorsqu'on passe d'une disposition à l'autre par un nombre pair d'inversions.

Ainsi, dans la figure 44 de la page 105 l'ordre des jetons se déduit de celui de la figure 43 en opérant six inversions, à savoir, en intervertissant l'ordre de 1 et 2, de 3 et 4, de 5 et 6, de 7 et 8, de 9 et 10, et de 11 et 12. Dès lors, on peut passer de l'une à l'autre disposition en manœuvrant les jetons dans la boîte.

Si cependant, dans le second diagramme, l'ordre des trois derniers jetons était 13, 15, 14 au lieu de 13, 14, 15, nous aurions à opérer sept inversions de jetons pour passer d'un ordre à l'autre et, dans ce cas, le problème n'est pas susceptible de solution.

La façon la plus commode de trouver le nombre d'inversions simples nécessaires pour déduire un arrangement donné d'un autre est d'opérer la transformation par une série de cycles. Supposons, par exemple, que les jetons soient mis dans la boîte dans un ordre quelconque (les jetons étant pris de gauche à droite dans les lignes horizontales successives) et que l'ordre primitif et l'ordre final soient respectivement.

1, 13, 2, 3, 5, 7, 12, 8, 15, 6, 9, 4, 11, 10, 14,
11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 9, 10, 13, 12, 8, 14, 15.

La seconde disposition peut se déduire de la première au moyen de douze inversions. La façon la plus simple de le voir est de disposer l'opération en trois cycles séparés, comme il suit ;

1, 11, 8 ;	13, 2, 3, 4, 12, 7, 6, 10, 14, 15, 9 ;	5.
11, 8, 1 ;	2, 3, 4, 12, 7, 6, 10, 14, 15, 9, 13 ;	5.

Ainsi, si dans la première des figures on substitue 11 à 1, puis 8 à 11, puis 1 à 8, nous faisons une inversion cyclique de trois nombres, opération équivalente à deux inversions simples (inversion de 1 et 11, et de 1 et 8). En résumé, l'opération revient à effectuer trois inversions cycliques, la première de trois nombres, la seconde de onze nombres et la troisième de un nombre ; par suite, elle est équivalente à (2 + 10 + 0) ou à douze inversions simples. Ce nombre étant pair, on peut déduire l'une des dispositions de l'autre en déplaçant les jetons de la boîte.

Il est évident que si la diposition initiale était la même que celle demandée, à l'exception des trois derniers jetons, que nous prendrons dans l'ordre 15, 14, 13, il nous faudrait effectuer une inversion pour les amener dans l'ordre 13, 14, 15 ; le problème dans ce cas ne serait pas possible.

Cependant en faisant tourner la boîte d'un angle droit de façon à amener le côté AD à la partie supérieure du jeu, cette rotation serait équivalente à treize inversions simples. Car si nous conservons toujours la seizième case libre, la rotation aurait pour effet de changer une disposition quelconque, telle que la suivante :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,

en

13, 9, 5, 1, 14, 10, 6, 2, 15, 11, 7, 3, 12, 8, 4.

Ce qui revient à effectuer treize inversions simples. Par suite, une disposition pour laquelle le problème n'est pas possible, pourrait être ainsi remplacée par une autre conduisant à une solution, et *vice versa*.

De plus, même si la disposition primitive était une de celles conduisant à l'impossibilité du problème, en laissant la première case vide, au lieu de la dernière, il serait possible de disposer les quinze jetons suivant leur ordre naturel. Car, en représentant la case blanche par b, le problème reviendrait à changer l'ordre.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, b,

en

$$b, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 :$$

ce qui constitue une inversion cyclique de seize termes, et, par suite, est une opération équivalente à quinze inversions simples. De la sorte, une disposition des jetons pour laquelle le problème est impossible pourra être remplacée par une autre conduisant à la possibilité, et *vice versa.*

Il est évident que tout ce que nous venons de dire s'applique également à une boîte rectangulaire contenant $m. n$ cases et $(m. n - 1)$ jetons numérotés. Bien entendu, on peut avoir $m = n$. En faisant tourner une pareille boîte de 90°, si les nombres m et n sont tous les deux pairs, l'opération est équivalente à $m. n - 3$ inversions simples. Une disposition pour laquelle le problème n'est pas possible peut donc ainsi être remplacée par une autre donnant une solution, et *vice versa*. Mais à moins que m et n ne soient des nombres pairs, la rotation est équivalente seulement à un nombre pair d'inversions.

De même, si l'un ou l'autre des nombres m et n, est pair, et s'il est impossible de résoudre le problème avec la dernière case libre, on peut le rendre possible en laissant libre la première case.

On peut augmenter la difficulté du problème en limitant les mouvements possibles : en fixant, par exemple, dans la boîte des petites réglettes que les jetons en mouvement ne seront pas autorisés à franchir.

Nous pouvons concevoir également un jeu semblable avec un cube, mais la manœuvre des jetons ne pourrait se faire pratiquement que par section.

La Tour d'Hanoï. — Le jeu ingénieux connu sous le nom de *tour d'Hanoï* a été imaginé en 1883 par M. Claus (Lucas).

Il consiste en trois chevilles fixées sur un plateau et en huit disques circulaires, de bois ou de carton, percés au centre d'un trou

permettant de les enfiler sur les chevilles. Ces disques sont de diamètres différents et, à l'origine, ils sont tous sur la même cheville, le plus grand à la base et les autres suivant leur rang de décroissance jusqu'à celui couronnant la pile qui est le plus petit. Cette disposition forme la *tour*. Le problème consiste à faire passer chaque disque d'une cheville sur une autre, de telle sorte qu'aucun d'eux ne soit placé sur un disque plus petit, pour former finalement sur l'une des deux autres chevilles, en utilisant tous les disques, une tour identique à celle que l'on avait primitivement.

On opère comme il suit :

1° Si nous avons à l'origine n disques sur la cheville A, la première opération consiste à faire passer graduellement les $n-1$ disques supérieurs de la cheville A sur la cheville B, en laissant libre la troisième cheville C.

Soit x le nombre des transports qu'une pareille opération exige.

2° On déplace alors le dernier, c'est-à-dire le plus grand et on l'enfile sur C.

3° Puis en renversant le premier procédé, on transporte graduellement les $n-1$ disques de B sur C, opération qui exige encore x transports.

Dès lors, si l'opération du transfert d'une tour de $n-1$ disques exige x transports simples de disques, l'opération du déplacement d'une tour de n disques exigera $2x+1$ transports séparés de disques simples.

Or, pour deux disques, on a 3 ou 2^2-1 transports, donc, pour trois disques, nous aurons $2(2^2-1)+1$ ou 2^3-1 transports, et d'une façon générale, pour n disques, nous aurons à effectuer 2^n-1 transports simples de disques.

Ainsi, les huit disques du jeu demandent $2^8-1=255$ transports simples. Ce résultat pourrait aussi s'obtenir au moyen de la théorie des différences finies. Il faut remarquer que chaque déplacement alterné revient à transporter le plus petit disque d'une cheville sur une autre, les chevilles étant prises en ordre circulaire.

M. de Parville a publié une si jolie légende sur l'origine de ce jeu que nous ne pouvons résister au plaisir de la reproduire [1].

« Dans le grand temple de Bénarès, dit-il, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, on voit, plantées dans une dalle d'airain, trois aiguilles de diamant, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila, au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour de Brahma. Nuit et jours les prêtres se succèdent, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes et immuables imposées par Brahma. Le prêtre ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois ; il ne peut poser ce disque que sur une aiguille libre ou au-dessus d'un disque plus grand. Lorsqu'en suivant strictement ces recommandations les 64 disques auront été transportés de l'aiguille, où Dieu les a placés, sur la troisième, la tour et les Brahmes tomberont en poussière et ce sera la fin du monde. »

Le nombre des transports séparés d'un simple disque que les Brahmines doivent effectuer pour déplacer la tour est de $2^{64} - 1$ ou 18 446 744 073 709 551 615 ; nombre qui, en admettant que l'opération soit exécutée sans erreur de la part des prêtres, exigerait plusieurs milliers de millions d'années

Les anneaux chinois [2]. — La figure 45 représente un jeu un peu plus difficile, connu sous le nom des anneaux chinois et que l'on trouve chez presque tous les marchands de jouets.

(1) *La Nature*, Paris, 1884, première partie, pp. 285-286.

(2) Il a été décrit par Cardan, en 1550, dans son ouvrage *De subtilitate*, livre XV, paragraphe 2, édition Sponius, vol. III, p. 587 ; par Wallis dans son *Algèbre*, seconde édition, 1693, *Œuvres*, vol. II, chap. III, pp. 472-478.

Ozanam y fait également allusion dans ses *Récréations*, édition de 1723, vol. IV, p. 439.

Il consiste en un certain nombre d'anneaux métalliques égaux enfilés sur une sorte de navette évidée dans la partie centrale et munis chacun d'une petite tringle traversant une planchette en bois. Ils sont disposés de telle sorte que l'anneau à l'une des extrémités (A par exemple) peut être, à volonté, enlevé ou monté sur la navette ; mais un autre anneau quelconque ne peut être enlevé ou monté que si l'anneau le plus voisin du côté A est enfilé sur la navette, et tous les autres anneaux, du même côté, enlevés.

L'ordre des anneaux ne peut être modifié.

Un seul anneau peut être enlevé ou monté à la fois sur la navette [dans le jeu tel qu'on le trouve ordinairement, cette règle présente une exception en ce qui concerne les deux premiers anneaux qui peuvent être enlevés ou montés en même temps ; mais pour simplifier notre exposition nous supposerons tout d'abord qu'un seul anneau peut être enfilé ou enlevé à la fois].

Nous allons montrer que, dans le cas de n anneaux, il est nécessaire pour les faire sortir tous de la navette d'enlever ou d'enfiler un anneau simple un nombre de fois représenté par $\frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$ ou par $\frac{1}{3}(2^{n+1} - 2)$ suivant que n est impair ou pair.

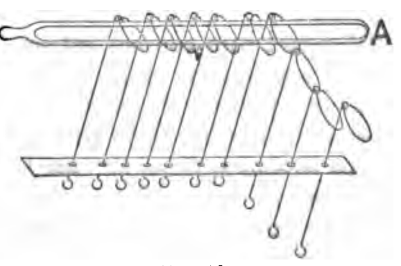


Fig. 45.

Appelons d'une façon générale *pas*, l'opération qui consiste à enlever ou à faire passer un anneau sur la navette et supposons les anneaux numérotés en partant de l'extrémité A. Admettons que les m premiers anneaux soient sortis de la navette, tous les autres étant encore enfilés, et que l'enlèvement de l'anneau suivant exige $x - 1$ pas ; ceci revient à dire que $(x - 1)$ pas additionnels sont nécessaires pour disposer les anneaux de telle sorte que les $m + 1$ premiers soient hors de la navette et tous les autres sur la navette.

Avant de faire cette opération nous pouvons enlever le $(m+2)^{me}$ anneau, de sorte que l'enlèvement du $(m+1)^{me}$ et du $(m+2)^{me}$ anneau exige x pas en partant de la position initiale.

Supposons ces x pas faits et les $(m+2)$ premiers anneaux sortis de la navette, les autres étant encore enfilés, et cherchons combien de pas additionnels sont nécessaires pour enlever les $(m+3)^{me}$ et $(m+4)^{me}$ anneaux. Pour effectuer l'opération nous commençons par enlever le $(m+4)^{me}$ anneau, ce qui nous donne 1 pas; puis avant de pouvoir enlever le $(m+3)^{me}$ nous devons arranger les anneaux de façon que le $(m+2)^{me}$ soit sur la navette et les $(m+1)$ premiers hors de la navette : cette opération s'effectuera comme il suit :

1° Nous devons avoir le $(m+1)^{me}$ anneau sur la navette et les m premiers sortis (ce qui exige $x-1$ pas);

2° puis nous devons enfiler le $(m+2)^{me}$ anneau (ce qui donne 1 pas) :

3° Enfin, il nous faut enlever le $(m+1)^{me}$ anneau (ce qui exige encore $x-1$ pas).

Ainsi, cette série de manœuvres nous donne en tout

$$[2(x-1)+1] \text{ pas.}$$

Maintenant nous pouvons enlever le $(m-3)^{me}$ anneau (1 pas) et nous restons avec les $(m+1)$ premiers anneaux sortis, le $(m+2)^{me}$ sur la navette, le $(m+3)^{me}$ également sorti et tous les autres sur la navette. Enfin pour enlever le $(m+2)^{me}$ anneau : 1° nous laissons le $(m+1)^{me}$ sur la navette et nous enlevons les m premiers $(x-1$ pas$)$;

2° nous enlevons le $(m+2)^{me}$ anneau (1 pas);

3° nous enlevons le $(m+1)^{me}$ anneau $((x-1)$ pas$)$.

Cette nouvelle série de manœuvres représente

$$[2(x-1)+1] \text{ pas,}$$

Par conséquent, si lorsque les m premiers anneaux sont enlevés,

il faut x pas, pour détacher le $(m+1)^{me}$ et le $(m+2)^{me}$, le nombre des pas additionnels nécessaires pour détacher les $(m+3)^e$ et $(m+4)^{me}$ anneaux sera :

$1+[2(x-1)+1]+1+[2(x-1)+1]$, c'est-à-dire $4x$.

Pour déterminer le nombre total des pas nécessaires pour enlever un nombre impair d'anneaux, nous raisonnerons maintenant comme il suit :

L'enlèvement du 1er anneau exige 1 pas ;

Par suite, l'enlèvement des 3 premiers anneaux demande 4 pas additionnels.

L'enlèvement des 5 premiers anneaux demande 4^2 pas additionnels.

. . . .

Nous voyons ainsi que le nombre des *pas* à faire pour enlever les $(2\,n+1)$ premiers anneaux est

$$1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}(2^{2n+2}-1).$$

Le raisonnement est semblable pour déterminer le nombre des *pas* nécessaires pour enlever un nombre pair d'anneaux.

L'enlèvement des 2 premiers anneaux exige 2 pas ;

L'enlèvement des 4 premiers anneaux demande 2×4 pas additionnels ;

L'enlèvement des 6 premiers anneaux demande 2×4^2 pas additionnels ;

. . . .

Par conséquent, pour enlever les $2\,n$ premiers anneaux, il faudra exécuter un nombre total de pas représenté par

$$2+2\times 4+2\times 4^2+2\times 4^3+\ldots+2\times 4^{n-1}=\frac{1}{3}(2^{2n+1}-2).$$

Si nous enlevons ou si nous enfilons les deux premiers anneaux en un seul pas au lieu d'exécuter l'opération en pas séparés, ces résultats deviennent respectivement :

$$2^{2n} \text{ et } 2^{2n-1}-1.$$

Nous avons donné cette analyse parce qu'elle est la solution directe d'un problème qui, à une certaine époque, attira l'attention, et dont Cardan s'est occupé en 1550, puis Wallis en 1693, mais tous les deux sans succès. Nous allons présenter maintenant une nouvelle solution plus élégante mais moins rationnelle.

Cette solution due à M. Gros [1] repose sur une convention d'après laquelle chaque position des anneaux est représentée par un certain nombre écrit dans le système de numération binaire, de telle sorte que chaque pas s'indique en ajoutant ou en retranchant l'unité.

Représentons chaque anneau par un petit cercle : si un anneau est sur la navette le petit cercle est décrit au-dessus d'une barre horizontale figurant la navette, tandis que si l'anneau est sorti de la navette le petit cercle est décrit sous la barre.

Ainsi la figure 46 de la page 114 représente une suite de sept anneaux dans laquelle les deux premiers sont sortis de la navette, les trois qui suivent montés sur la navette, le sixième sorti, et le septième engagé sur la navette.

On convient de désigner les anneaux qui sont montés par les chiffres 1 et 0 alternativement, en allant de gauche à droite, et un anneau sorti de la navette par le chiffre assigné à celui monté sur la navette le plus voisin sur sa gauche, ou par 0 s'il ne se trouve aucun anneau sur sa gauche.

En appliquant cette convention aux trois positions représentées ci-dessous on obtient respectivement les nombres écrits sous chacune d'elles.

1 101 000

Fig. 46.

1 101 001

Fig. 47.

100 111

Fig. 48.

La position (2) se déduit de (1) en faisant passer le premier an-

(1) L. Gros. — *Théorie du Baguenaudier*, Lyon, 1872. Nous empruntons cette citation à Lucas, vol. I, partie 7.

neau sur la navette, tandis que la position (3) se déduit de (1) en faisant sortir le quatrième anneau.

Il résulte de ce qui précède, comme nous l'avons déjà dit, que chaque position des anneaux est représentée par un nombre écrit dans le système de numération à base 2 ; de plus, puisque en allant de gauche à droite chaque anneau monté sur la navette donne lieu à une variation (c'est-à-dire de 1 à 0 ou de 0 à 1) et chaque anneau enlevé donne une continuation ou permanence, l'effet de l'enlèvement d'un anneau se traduira par la soustraction ou l'addition d'une unité. Par exemple, le nombre représentant la position des anneaux de la figure 47 se déduit du nombre représentant la disposition de la figure 46 en ajoutant 1 à ce dernier nombre. De même le nombre représentant la position des anneaux de la figure 48 se déduit de celui représentant la disposition (1) en retranchant l'unité.

Lorsque tous les sept anneaux sont montés sur la navette, cette disposition est représentée par le nombre 1010101, et lorsqu'ils sont tous sortis, la disposition est figurée 0000000. Dès lors le passage de la première disposition à la seconde exige un nombre de pas égal à la différence entre ces deux nombres écrits dans le système binaire. Or, le premier est égal à $2^6 + 2^4 + 2^2 + 1$ ou à 85 et le second à 0, par suite, l'opération nécessite 85 pas.

On ferait voir par un raisonnement semblable que pour enlever une suite de $2n + 1$ anneaux, il faut $(1 + 2^2 + ... + 2^{2n})$ pas, c'est-à-dire $\frac{1}{3}(2^{2n+2} - 1)$; et que pour enlever une suite de $2n$ anneaux, il faut : $(2 + 2^3 + ... + 2^{2n-1})$ pas, soit $\frac{1}{3}(2^{2n+1} - 2)$.

Nous donnons ci-après un tableau indiquant les pas nécessaires pour enlever les quatre premiers anneaux d'une suite de cinq anneaux. Les diagrammes dans la colonne centrale montrent les positions successives des anneaux après chaque opération.

Les nombres qui accompagnent sur la droite chaque diagramme représentent ces positions, chaque nombre se déduisant du précédent par l'addition d'une unité. Les pas accoladés peuvent être faits en un seul mouvement, et en les effectuant ainsi, l'opération est ter-

minée en sept mouvements au lieu de dix ; tout ceci est en concordance avec les formules données plus haut, page 115.

Position initiale. . .	10101
Après le 1er pas . .	10110
» 2e » . .	10111
» 3e » . .	11000
» 4e » . .	11001
» 5e » . .	11010
» 6e » . .	11011
» 7e » . .	11100
» 8e » . .	11101
» 9e » . .	11110
» 10e » . .	11111

Fig. 49.

M. Gros prétend qu'il est possible d'effectuer soixante-quatre à quatre-vingts *pas* à la minute, ce qui nous semble un peu exagéré. En acceptant comme exact le plus petit de ces nombres, on pourrait enlever dix anneaux en moins de huit minutes ; l'enlèvement de vingt-cinq anneaux exigerait plus de 582 jours de dix heures de travail chacun ; et pour faire sortir soixante anneaux il faudrait au moins 768 614 336 404 564 650 pas, opération qui exigerait environ 55 000 000 000 années de travail, en supposant, bien entendu, qu'il n'y ait pas d'erreur commise.

Le problème des huit reines (1). — Le problème consistant

(1) Pour l'historique de la question nous renvoyons à W. Ahrens, *Mathematische Untherhaltungen und Spiele*, Leipzig, 1901, chap. IX.

à déterminer de combien de manières différentes huit reines (ou huit pions tenant lieu de cette pièce) peuvent être placées sur un échiquier ordinaire — ou d'une façon plus générale de combien de manières différentes, n reines peuvent être disposées sur un échiquier de n^2 cases — de telle sorte qu'aucune des reines ne puisse être prise par une autre, a été proposé, à l'origine par Nauck en 1850.

En 1874, Dr Günther [1] fit paraître une solution basée sur la théorie des déterminants.

Car si chaque symbole représente la case correspondante de l'échiquier, les solutions possibles sur un échiquier de n^2 cases seront données par ceux des termes, s'il y en a, du développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n-3} & b_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{2n-2} & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

dans lesquels une même lettre et un indice ne figurent qu'une fois.

La raison en est évidente : chaque terme dans un déterminant contient un élément, et un seul, pris dans chaque ligne horizontale et dans chaque colonne verticale : par conséquent, ces termes indiqueront des positions sur l'échiquier pour lesquelles les reines ne peuvent être prises l'une par l'autre par des mouvements identiques à ceux de la tour. De plus, dans le déterminant qui précède, les lettres et les indices sont disposés de telle sorte que toutes les mêmes lettres et tous les mêmes indices figurent dans les diagonales, c'est-à-dire dans le sens du mouvement du fou ; par suite, en ne conservant que les termes dans lesquels toutes les lettres et tous les

[1] Grunert. — *Archiv der Mathematik und Physik*, 1874, vol. LVI, pp. 281-292.

indices sont différents, nous aurons les cases de l'échiquier sur lesquelles les reines ne pourront être prises entre elles par des mouvements idendiques à ceux du fou. Il est clair qu'il n'y a pas lieu de tenir compte des signes des termes.

Dans le cas de l'échiquier ordinaire, le déterminant est du 8me ordre et contient par conséquent 1.2.3...8 ou 40320 termes, de sorte que cette méthode ne peut être utilisée pour l'échiquier usuel de 64 cases ou pour un échiquier d'un plus grand nombre de cases, à moins de trouver un moyen rapide de reconnaître les termes à prendre dans le développement.

Le Dr J.W.L. Glaisher (1) a donné, en 1874, un moyen de trouver les termes en question et, autant que nous avons pu le vérifier, la théorie du jeu en est restée au point où il l'a laissée. Il a montré que connaissant toutes les solutions pour n reines sur l'échiquier de n^2 cases, on peut en déduire toutes les solutions d'un certain type pour $n+1$ reines sur l'échiquier de $(n+1)^2$ cases, et que toutes les autres solutions des $n+1$ reines sur l'échiquier de $(n+1)^2$ cases peuvent alors s'obtenir sans difficulté.

Sa méthode sera rendue suffisamment compréhensible en l'appliquant à un exemple.

On voit facilement que le problème ne présente aucune solution pour $n=2$ et $n=3$. Quand $n=4$, on trouve deux termes du déterminant donnant des solutions, à savoir : $b_2c_5\gamma_3\beta_6$ et $c_3\beta_2b_6\gamma_5$. Pour trouver les solutions quand $n=5$, Glaisher procède comme il suit. Dans ce cas le déterminant de Günther est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Pour obtenir les solutions (si elles existent) qui comprennent l'é-

(1) *Philosophical Magazine*, Londres, décembre, 1874, 4e série, série XLVIII, pp. 457-467.

lément a_9, il suffit d'écrire a_9 à la suite de celles des solutions relatives à l'échiquier de 16 cases où ne figure pas la lettre a. Comme c'est le cas pour les deux solutions que nous venons de donner, nous déterminons ainsi deux solutions, à savoir $b_2c_5\gamma_3\beta_6a_9$ et $c_3\beta_2b_6\gamma_5a_9$. Les solutions comprenant a_1, e_5 et ε_5 peuvent s'obtenir immédiatement par symétrie. Les huit solutions ainsi obtenues sont toutes distinctes et nous pouvons les appeler solutions du premier type.

Ces solutions sont les seules dans lesquelles figurent les éléments des angles du carré formé par le déterminant. Par suite les autres solutions s'obtiendront au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} o & b_2 & c_3 & d_4 & o \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ o & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & o \end{vmatrix}$$

Si nous formons le mineur de b_2 et si nous y remplaçons par zéro chaque terme comprenant la lettre b ou l'indice 2, nous déterminons toutes les solutions où figure b_2. Mais, dans ce cas, le mineur se réduisant immédiatement à $d_6a_5\delta_4\beta_8$, nous obtenons ainsi une solution, à savoir $b_2d_6a_5\delta_4\beta_8$. Les solutions dans lesquelles figurent $\beta_2, \delta_4, \delta_6, \beta_8, b_8, d_6$ et d_4 peuvent être obtenues par symétrie.

Il est aisé de voir que parmi ces huit solutions, deux seulement sont distinctes : on peut les appeler solutions du second type.

Enfin les dernières solutions doivent être obtenues au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} o & o & c_3 & o & o \\ o & a_3 & b_4 & c_5 & o \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ o & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & o \\ o & o & \gamma_7 & o & o \end{vmatrix}$$

Si nous prenons le mineur de c_3 et si nous y remplaçons par o chaque terme renfermant la lettre c ou l'indice 3, nous obtien-

drons toutes les solutions où figure c_3. Mais, dans ce cas, le mineur s'annule. Par suite aucune solution ne renferme c_3 et, comme conséquence, par symétrie, aucune solution ne renferme γ_3, γ_7 ou c_7.

Si la méthode que nous venons d'exposer nous avait fourni quelques solutions renfermant le 3me élément de la première ou de la dernière ligne ou colonne du déterminant, nous les aurions appelées solutions du 3me type.

En résumé le cas considéré présente 10 solutions et seulement 10, à savoir : huit du premier type, deux du second type, et aucune du troisième type.

Semblablement, pour $n = 6$, nous obtenons : aucune solution du premier type, quatre solutions du second type, et aucune solution du troisième type ; soit en tout quatre solutions. Pour $n = 7$, nous obtenons seize solutions du premier type, vingt quatre solutions du second type, aucune solution du troisième type et aucune solution du quatrième type, soit en tout 40 solutions. Pour $n = 8$, nous avons seize solutions du premier type, cinquante six solutions du deuxième type et vingt solutions du troisième type, c'est-à-dire au total 92 solutions.

Il y a lieu de remarquer que toutes les solutions d'un type ne sont pas toujours distinctes. En général d'une solution quelconque, sept autres peuvent se déduire immédiatement.

De ces huit solutions quatre sont constituées par la solution initiale ou fondamentale et par les trois semblables obtenues en faisant tourner l'échiquier d'un, de deux ou de trois angles droits ; les quatre autres sont les images des quatre premières réfléchies dans un miroir. Mais dans certains cas particuliers il peut arriver que la réflexion reproduise la figure originale, ou qu'une rotation de un ou de deux angles droits conduise à des résultats ne présentant aucune différence. Ainsi, sur les échiquiers de 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2 et 10^2 cases, il y a respectivement 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92 solutions fondamentales ; tandis que le nombre total de solutions est respectivement pour chacun d'eux 2, 10, 4, 40, 92, 352 et 724.

La collection suivante de solutions fondamentales intéressera cer-

tainement le lecteur. Les positions des reines sur l'échiquier sont indiquées par des chiffres : le premier chiffre représente le rang de la case occupée par la reine dans la première colonne en comptant à partir d'une des extrémités de la colonne, le second chiffre indique le rang de la case dans la seconde colonne, et ainsi de suite. Ainsi, sur un casier de 4^2 cases, la solution représentée par 3 142, signifie qu'une reine est sur la troisième case de la première colonne, une autre sur la première case de la seconde colonne, une troisième sur la quatrième case de la troisième colonne, et enfin, la quatrième reine sur la seconde case de la quatrième colonne. Si une solution fondamentale ne donne naissance qu'à quatre solutions, le nombre qui la représente est placé entre deux parenthèses, si elle fournit seulement deux solutions, le nombre qui la symbolise est placé entre deux crochets ; les autres solutions fondamentales donnent naissance chacune à huit solutions.

Sur un échiquier de 4^2 cases on trouve 1 solution fondamentale [3 142] ;

Sur un échiquier de 5^2 cases on trouve 2 solutions fondamentales, 14 253, [25 314] ;

Sur un échiquier de 6^2 cases on trouve 1 solution fondamentale (246 135) ;

Sur un échiquier de 7^2 cases on trouve 7 solutions fondamentales 1 357 246, 3 572 461, (5 724 613), 4 613 572, 3 162 574, (2 574 136).

L'échiquier de 8^2 cases donne 12 solutions fondamentales, 25 713 864, 57 138 642, 71 386 425, 82 417 536, 68 241 753, 36 824 175, 64 713 528, 36 814 752, 36 815 724, 72 418 536, 26 831 475, (64 718 253).

L'arrangement suivant cet ordre est du à M. Oram.

Il faut remarquer que les solutions 10, 11 et 12 sont respectivement à peu près semblables aux solutions 4, 6 et 7. La 6me solution est la seule pour laquelle trois reines ne se trouvent pas en ligne droite.

L'échiquier de 9^2 cases fournit 46 solutions fondamentales dont l'une d'elles est représentée par le nombre 248 396 157. Sur l'échi-

quier de 10^2 cases on trouve 92 solutions fondamentales ; elles ont été données par le Dr A. Pein (1) ; l'une d'elles s'exprime par le nombre 2 468 *t* 13 579, dans lequel *t* représente 10. Sur l'échiquier de 11^2 cases, les solutions fondamentales sont au nombre de 341 ; elles ont été données par le Dr T. B. Sprague (2) : l'une d'elles est 15 926 *t* 37 *e* 48.

Nous pouvons ajouter que pour un échiquier de n^2 cases, il existe toujours une solution symétrique de la forme 246... *n* 135... $(n - 1)$, quand $n = 6m$, ou $n = 6m + 4$.

M. Oram a montré également que sur l'échiquier de n^2 cases, et

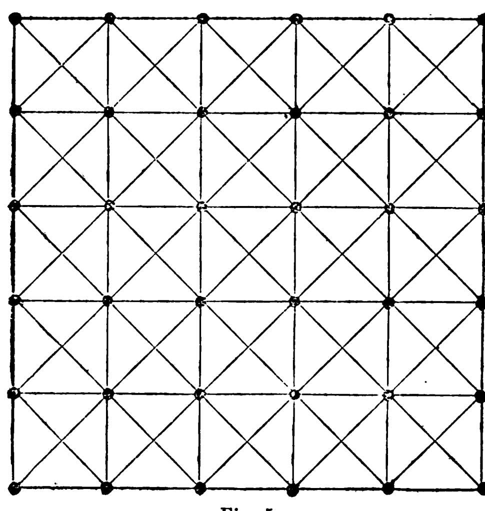


Fig. 50

quand *n* représente un nombre premier, on obtient des solutions par des arrangements cycliques des *n* nombres naturels, autres que

(1) *Aufstellung von n königinnen auf einem Schachbrett von* n^2 *Feldern*, Leipzig, 1889.

(2) *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. XVII, 1898-9, pp. 43-68.

celui donné par l'ordre naturel ; on peut voir, par exemple la solution citée ci-dessus.

On trouve chez les marchands de jouets un jeu identique sous la forme d'un petit carré en bois comprenant trente six cases et portant les divisions et les traits représentés sur la figure 50. A chaque point de rencontre des lignes horizontales et verticales, la planchette est percée d'un trou et il s'agit d'y placer six petites chevilles de façon que deux quelconques d'entre elles ne soient pas sur la même ligne.

Autres problèmes avec des reines. — Le capitaine Turton a signalé à notre attention deux autres problèmes présentant beaucoup d'analogie avec le précédent ; aucun d'eux, croyons-nous, n'est encore connu et n'a été résolu autrement que d'une façon empirique.

Dans le premier il s'agit de placer huit reines sur un échiquier de manière à commander le plus petit nombre possible de cases. Ainsi, en plaçant les reines sur les cases 1 et 2 de la seconde colonne, sur la case 2 de la sixième colonne, sur les cases 1, 3, 7 de la septième colonne et sur les cases 2 et 7 de la huitième colonne, nous aurons sur l'échiquier onze cases qui ne seront pas en échec ; on peut déterminer d'autres arrangements nous donnant ce même nombre.

Est-il possible de disposer les reines de façon à avoir plus de onze cases qui ne soient pas en échec ? jusqu'à présent nous n'avons réussi, ni à faire mieux, ni à montrer que cela n'était pas possible.

Dans le second problème, il s'agit de disposer sur un échiquier m reines (m étant plus petit que 5) de façon à commander le plus grand nombre possible de cases. Par exemple, quatre reines peuvent être placées de plusieurs manières sur un échiquier pour commander cinquante-huit cases indépendamment de celles qu'elles occupent, en laissant par conséquent seulement deux cases qui ne soient pas en échec. Ce résultat peut s'obtenir en particulier en plaçant les reines sur la cinquième case de la troisième colonne, sur

la première case de la quatrième colonne, sur la sixième case de la septième colonne et sur la deuxième case de la huitième colonne ; ou encore en les disposant respectivement sur les première, septième, troisième et cinquième cases des première, troisième, cinquième et septième colonnes.

Un problème semblable consisterait à déterminer le nombre minimum de reines et les positions qu'il faudrait leur donner sur un échiquier de n^2 cases, pour que toutes les cases soient commandées ou occupées.

Il paraîtrait que, même en introduisant la restriction qu'aucune reine ne peut en prendre une autre, on ne trouve pas moins de 91 solutions typiques permettant de disposer 5 reines sur un échiquier de façon à commander toutes les cases (1).

Problèmes avec d'autres pièces du jeu. — On peut proposer des problèmes analogues en choisissant d'autres pièces du jeu d'échec. Par exemple on a proposé de déterminer le nombre maximum des cavaliers pouvant être placés sur un échiquier de n^2 cases de façon que deux quelconques d'entre eux ne soient pas en prise, ainsi que le nombre minimum des cavaliers qu'il faut disposer sur l'échiquier pour que toutes les cases soient commandées ou occupées. (2)

Des problèmes semblables ont été proposés pour le cas de k rois sur un échiquier de n^2 cases. (3) On a avancé que, si $k = 2$, le nombre de manières de disposer 2 rois sur l'échiquier de façon qu'ils ne puissent occuper deux cases adjacentes a pour expression

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n^2+3n-2).$$

De même, si $k = 3$, le nombre de manières dont on peut dispo-

(1) *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris, 1901, vol. VIII, p. 83.
(2) *Ibid.* mars 1896, vol. III, p. 58 ; 1897, vol. IV, pp. 15, 254 ; et 1898, vol. V, p. 87.
(3) *Ibid.* juin 1901, p. 140.

ser 3 rois sur l'échiquier de façon que deux d'entre eux n'occupent pas des carrés adjacents est

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n^4+3n^3-20n^2-30n+132.)$$

Le problème des quinze écolières. — Ce problème, qui a été énoncé pour la première fois par M. T. P. Kirkman et qui est quelquefois connu sous le nom de *problème de Kirkman* (1), consiste, en principe, à disposer quinze objets en différentes séries de triades remplissant certaines conditions déterminées.

(1) Il a été publié pour la première fois en 1850 dans *Lady's and Gentleman's Diary*, p. 48, et a donné lieu à de nombreux mémoires. Nous citerons principalement les articles suivants :

A. Cayley dans le *Philosophical Magazine*, juillet 1850, série 3, vol. XXXVII, pp. 50-53 ;

T. P. Kirkmann, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1850, vol. V, p. 260 ;

R. R. Anstice, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1852, vol. VII, pp. 279-292 ;

B. Pierce, *Gould's Journal*, Cambridge U. S. 1860, vol. VI, pp. 169-174.

T. P. Kirkman, *Philosophical Magazine*, mars 1862, série 4, vol. XXIII, pp. 198-204 ;

W. S. B. Woolhouse, dans le *Lady's Diary* de 1862, pp. 84-88, et de 1863, pp. 79-90 ;

Le même dans le *Educational Times Reprints*, 1867, vol. VIII, pp. 76-83 ;

J. Power, dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, 1867, vol. VIII, pp. 236-251 ;

A. H. Frost, dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, 1871, vol. XI, pp. 26-37 ;

E. Carpmael, dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1881, vol. XII, pp. 148-156 ;

Lucas, dans ses *Récréations*, vol. II, partie VI ;

A. C. Dixon, dans le *Messenger of Mathematics*, Cambridge, octobre 1893, vol. XXIII, pp. 88-89 ; et W. Burnside, dans le même, 1894, vol. XXIII, pp. 137-143.

Il a été également discuté, par W. Ahrens dans ses *Mathematische Unterhaltungen und spiele*, Leipzig, 1901, chap. XIV.

On le présente généralement sous cette forme : Une maîtresse de pension avait l'habitude de conduire tous les jours en promenade ses quinze élèves en les disposant sur cinq rangs, comptant chacun trois jeunes filles. On demande comment elle doit s'y prendre pour que chacune des élèves se trouve successivement une seule fois en compagnie de chacune de ses camarades.

Plus généralement on pourrait se proposer de disposer $3m$ jeunes filles en triades pour faire des promenades pendant $\frac{1}{2}(3m - 1)$ jours, de façon que chaque enfant eût successivement une seule fois chacune de ses camarades comme compagne de route.

La théorie de la formation de toutes les triades possibles pour le cas de quinze élèves ne présente aucune difficulté sérieuse, mais l'extension au cas de $3m$ personnes n'a pas encore été résolue. Nous allons présenter trois solutions, toutes les trois analytiques, mais en faisant remarquer que le problème peut également se traiter par des méthodes géométriques.

Méthode de Frost. — La première de ces solutions est due à M. Frost. Son exposition complète nous conduirait à des développements trop considérables et nous nous contenterons d'en présenter un aperçu qui donnera, pensons-nous, une idée suffisamment exacte du procédé.

Représentons par k l'une des jeunes filles, ses compagnes de promenades étant différentes chaque jour, supposons qu'elles soient :

le dimanche . . . . a_1 et a_2,
le lundi. . . . . b_1 et b_2,
le mardi . . . . c_1 et c_2,
. . . .
et finalement le samedi . . . . g_1 et g_2.

Nous avons ainsi les sept triades ou combinaisons trois à trois

$$ka_1a_2 \mid kb_1b_2 \mid kc_1c_2 \mid kd_1d_2 \mid ke_1e_2 \mid kf_1f_2 \mid kg_1g_2.$$

dont chacune sert pour un jour, et il nous faut déterminer sept suites de quatre autres triades formées avec les quatorze lettres a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2, de telle sorte que deux mêmes lettres ne figurent pas ensemble.

Or, convenons d'écrire a pour a_1 ou a_2, b pour b_1 ou b_2, c pour c_1 ou c_2, et ainsi de suite ; les indices 1 et 2 sont appelés complémentaires. Alors, puisque les trois lettres qui entrent dans chacune des triades que nous cherchons à former doivent être différentes, il s'agit de composer avec ces lettres a, b, c, d, e, f, g des arrangements de trois lettres, tels que deux quelconques d'entre elles ne se trouvent pas ensemble plus d'une fois. Aussi on peut grouper a avec bc, de et fg, puis b avec df et eg, et enfin c avec dg et cf.

Nous obtenons, par ce moyen, les sept triades fondamentales :

$$abc, \ ade, \ afg, \ bdf, \ beg, \ cdg, \ cef.$$

Parmi ces sept triades, les quatre qui ne contiennent pas la lettre a seront placées dans la colonne du dimanche, les quatre qui ne renferment pas la lettre b seront inscrites dans la colonne du lundi, et ainsi de suite. Cela nous donne le canevas suivant ;

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
ka_1a_2	kb_1b_2	kc_1c_2	kd_1d_2	ke_1e_2	kf_1f_2	kg_1g_2
$bd\ f$	$ad\ e$	$ad\ e$	$ab\ c$	$ab\ c$	$ab\ c$	$ab\ c$
$be\ g$	$af\ g$	$af\ g$	$af\ g$	$af\ g$	$ad\ e$	$ad\ e$
$cd\ g$	$cd\ g$	$bd\ f$	$be\ g$	$bd\ f$	$be\ g$	$bd\ f$
$ce\ f$	$ce\ f$	$be\ g$	$ce\ f$	$cd\ g$	$cd\ g$	$ce\ f$

Faisons maintenant remarquer que chaque triade fondamentale donne quatre combinaisons des quatorze jeunes filles prises trois à trois, qui peuvent entrer dans le tableau des promenades de la semaine. Par exemple, la disposition bdf nous donne les quatre triades,

$$d_1b_1f_1, \ b_1d_2f_2, \ b_2d_1f_2, \ b_2d_2f_1.$$

On pourrait disposer les indices 1 et 2 de plusieurs autres manières, mais nous avons donné celle qui se présente le plus naturellement.

Inscrivons donc ces combinaisons dans les colonnes respectives qui contiennent *bdf*, c'est-à-dire dans les colonnes du dimanche, du mardi, du jeudi et du samedi ; puis, dans ces mêmes colonnes, donnons à l'autre lettre, *b*, *d* ou *f*, l'indice complémentaire de celui déjà écrit, on obtient ainsi pour les quatre dernières lignes du tableau

$b_1d_1f_1$	ade	$a\,d_1e$	abc	$a\,b_1c$	abc	$a\,b_1c$
$b_2e\,g$	afg	$a\,f\,g$	afg	$a\,f_1g$	ade	$a\,d_1e$
$c\,d_2g$	cdg	$b_1d_2f_2$	beg	$b_2d_1f_2$	beg	$b_2d_2f_1$
$c\,e\,f_2$	cef	$b_2e\,g$	cef	$c\,d_2g$	cdg	$c\,ef_2$

Cela fait, la triade suivante dans la colonne du dimanche est b_2eg. La disposition *beg* se présente dans quatre colonnes et comprend quatre triades possibles, telles que

$$b_2e_1g_1,\ b_2e_2g_2,\ b_1e_1g_2,\ b_1e_2g_1.$$

On les inscrit, et on donne les indices complémentaires aux autres mêmes lettres dans ces quatre colonnes.

En opérant ainsi, l'arrangement cherché s'obtient graduellement en prenant une triade à la fois, notant d'indices convenables les lettres dans les triades qui s'en déduisent, et donnant ensuite les indices complémentaires aux autres lettres semblables dans les mêmes colonnes.

Voici un arrangement final obtenu ainsi

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
ka_1a_2	kb_1b_2	kc_1c_2	kd_1d_2	ke_1e_2	kf_1f_2	kg_1g_2
$b_1d_1f_1$	$a_1d_2a_2$	$a_1d_1e_1$	$a_2b_2c_2$	$a_2b_1c_1$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_1c_2$
$b_2e_1g_1$	$a_2g_2f_2$	$a_2f_1g_1$	$a_1f_2g_1$	$a_1f_1g_2$	$ad_2\ e_1$	$a_2d_1e_2$
$c_1d_2g_2$	$c_1d_1g_1$	$b_1d_2f_2$	$b_1e_1g_2$	$b_2d_1f_2$	$b_1e_2g_1$	$b_2d_2f_1$
$c_2e_2f_2$	$c_2e_1f_1$	$b_2e_2g_2$	$c_1e_2f_2$	$c_2d_2g_1$	$c_2d_1g_2$	$c_1e_1f_2$

Nous pouvons obtenir d'autres solutions en choisissant sept autres triades ou en adoptant un autre arrangement pour les indices dans chaque triade (ou simplement en effectuant des inversions entre les lettres et les indices dans le tableau ci-dessus).

En opérant ainsi, M. Power a montré que le problème ne présentait pas moins de 15 567 552 000 solutions différentes, mais puisque le nombre total des manières dont la premenade peut être effectuée, dans une semaine, par les élèves disposées en triades est de $(455)^7$, la probabilité qu'une de ses promenades, prise au hasard, se fasse suivant la condition imposée par Kirkman est très petite.

La méthode de M. Frost est applicable au cas de $2^{2n} - 1$ écolières se promenant en triades pendant $2^{2n-1} - 1$ jours. Il a donné la solution détaillée pour soixante-trois jeunes filles marchant pendant trente-et-un jours, cas qui correspond à $n = 3$,

Méthode d'Anstice. — Une autre façon d'aborder le problème est due à M. Anstice ; elle fournit l'élégante solution suivante qui permet de déduire, au moyen d'une permutation circulaire, de l'ordre choisi pour le dimanche, l'ordre à adopter pour les six jours suivants.

Représentons les écolières respectivement par les lettres

$$k,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7$$

et supposons que l'ordre, pour le dimanche, soit :

$$ka_1b_1,\ a_2a_3a_5,\ a_4b_3b_6,\ a_6b_2b_7,\ a_7b_4b_5.$$

En faisant permuter circulairement les indices, on obient six autres arrangements qui remplissent les conditions du problème : la raison en est que dans la disposition donnée ci-dessus, la différence des indices de chaque couple de lettres semblables (telles que les lettres a ou les lettres b), dans une triade, diffère d'une triade à l'autre, et il en est de même de la différence des indices de chaque couple de lettres dissemblables entrant dans une triade.

On peut former, pour le dimanche, deux autres arrangements, qui donneront par permutation circulaire, les dispositions pous les autres jours de la semaine. Ce sont :

$$ka_1b_1,\ a_2a_3a_5,\ a_4b_5b_7,\ a_6b_3b_4,\ a_7b_2b_6,$$

et

$$ka_1b_1,\ a_2a_3a_5,\ a_4b_2b_6,\ a_6b_5b_7,\ a_7b_3b_4.$$

La méthode de M. Anstice s'applique au cas de $2p + 1$ jeunes filles se promenant par rangs de trois pendant p jours, de telle sorte qu'aucun couple ne puisse marcher ensemble plus d'une fois, p étant un nombre premier de la forme $12m + 7$. Il a montré comment il était possible de former un arrangement fondamental pour un jour de promenade et comment on pouvait en déduire les arrangements pour les $p - 1$ jours restants au moyen de permutations circulaires des indices. Le nombre des arrangements fondamentaux est de

$$3(2m + 1)(3m + 1).$$

Le problème des quinze écolières correspond à $m = 0$, et les trois arrangements fondamentaux de M. Anstice sont donnés plus haut.

Si $m = 1$, nous avons le problème des trente-neuf écolières. L'un des arrangements fondamentaux est dans ce cas :

$$ka_1b_1,\ a_2a_8a_{12},\ a_5a_7a_{10},\ a_6a_{17}a_{18},\ a_3b_{10}b_{15},\ a_4b_3b_5,\ a_9b_{18}b_{19},$$
$$a_{11}b_8b_{14},\ a_{13}b_9b_{17},\ a_{14}b_{12}b_{16},\ a_{15}b_4b_7,\ a_{16}b_2b_{11},\ a_{19}b_6b_{13}.$$

Si $m = 2$, nous avons le problème des soixante-trois écolières, dont M. Frost a donné une solution ; et ainsi de suite.

Méthode de M. Gill. — M. J. H. Gill nous a donné l'idée d'une nouvelle façon de traiter la question.

En représentant les élèves par les lettres

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{3m}$$

1° Il forme une triade du type $a, a_m + 1, a_{2m} + 1$, au moyen de laquelle il déduit, en permutant circulairement les indices 1, 2, 3,...., $3m$, m triades composant un arrangement pour un jour ; puis

2° Il forme $\frac{1}{2}(m - 1)$ autres triades telles que les trois différences des indices soient différentes, et il en tire, par des permutations circulaires des indices, les arrangements pour les $\frac{3}{2}(m - 1)$ jours qui restent.

Ainsi, dans le cas des quinze écolières, la triade $a_1a_6a_{11}$ donne (par des permutations circulaires des indices) un arrangement pour le premier jour et deux triades telles que $a_1a_2a_5$, $a_1a_3a_9$ nous permettant de former trente triades dont on peut déduire immédiatement un arrangement pour les six autres jours de la semaine. Voici une des solutions obtenues par cette méthode.

1er jour	2e jour	3e jour	4e jour	5e jour	6e jour	7e jour
1, 6, 11	1, 2, 5	2, 3, 6	5, 6, 9	7, 9, 15	9, 11, 2	11, 13, 4
2, 7, 12	3, 4, 7	4, 5, 8	7, 8, 11	8, 10, 1	10, 12, 3	12, 14, 5
3, 8, 13	8, 9, 12	9, 10, 13	12, 13, 1	3, 5, 11	5, 7, 13	15, 2, 8
4, 9, 14	10, 11, 14	11, 12, 15	14, 15, 3	4, 6, 12	6, 8, 14	1, 3, 9
5, 10, 15	13, 15, 6	14, 1, 7	2, 4, 10	13, 14, 2	15, 1, 4	6, 7, 10

Mais bien que cette méthode nous donne des triades qui nous permettent de résoudre le problème, l'arrangement final est empirique.

Une solution du problème des vingt-une écolières, pour dix jours de promenades, peut s'obtenir par cette méthode.

$a_1a_8a_{15}$ donne sept triades constituant un arrangement pour un jour et $a_1\ a_2\ a_6$, $a_1\ a_3\ a_{11}$. $a_1\ a_4\ a_{10}$ nous fournissent soixante-trois triades dont on peut déduire une disposition de promenade pour les neuf autres jours. Voici la solution obtenue ainsi :

1er jour	2e jour	3e jour	4e jour	5e jour
1, 8,15	1, 2, 6	7,10,16	13,16, 1	4, 7,13
2, 9,16	4, 5, 9	8,11,17	14,17, 2	5, 8,14
3,10,17	7, 8,12	12,15,21	18,21, 6	9,12,18
4,11, 8	10,11,15	18,19, 2	3, 4, 8	15,16,20
5,12,19	13,14,18	20, 1, 9	5, 7,15	17,19, 6
6,13,20	16,17,21	3, 5,13	9,11,19	21, 2,10
7,14,21	19,20, 3	4, 6,14	10,12,20	1, 3,11
6e jour	**7e jour**	**8e jour**	**9e jour**	**10e jour**
1, 4,10	2, 3, 7	10,13,19	16,19, 4	19, 1, 7
2, 5,11	5, 6,10	11,14,20	17,20, 5	20, 2, 8
6, 9,15	8, 9,13	15,18, 3	21, 3, 9	3, 6,12
12,13,17	11,12,16	21, 1, 5	6, 7,11	9,10,14
14,16, 3	14,15,19	2, 4,12	8,10,18	11,13,21
18,20, 7	17,18, 1	6, 8,16	12,14, 1	15,17, 4
19,21, 8	20,21, 4	7, 9,17	13,15, 2	16,18, 5

Nous serions heureux de recevoir d'un de nos lecteurs une solution semblable pour un arrangement analogue de trente-trois écolières faisant seize promenades pendant seize jours, en partant de triades types comme 1, 12, 23 ; 1, 2, 10 ; 1, 3, 16 ; 1, 4, 18 ; 1, 5, 11 ; 1, 6, 13, ou de toute autre suite de triades formées de la même manière, c'est-à-dire telles que (à l'exception de la première) les différences des indices qui y figurent soient toutes différentes.

Théorème de Walecki. — Récemment, M. Walecki — cité par M. Lucas — a montré que, connaissant une solution du problème de n élèves faisant des promenades par rangs de trois, pendant $\frac{n-1}{2}$ jours, on pouvait en déduire une solution pour le cas de $3n$ élèves se promenant pendant $\frac{1}{2}(3n-1)$ jours.

Car, si on connaît un arrangement des n écolières, a_1, a_2, a_3,..., a_n pour $\frac{1}{2}(n-1)$ jours ; ainsi qu'un arrangement des n élèves b_1, b_2, b_3,..., b_n ; et qu'un nouvel arrangement des n écolières c_1, c_2, c_3,..., c_n ; on a immédiatement un arrangement de ces $3n$ élèves pour $\frac{1}{2}(n-1)$ jours. Une suite de n triades pour un autre jour sera donnée par l'arrangement $a_m\, b_{m+k}\, c_{m+2k}$ en faisant m successivement égal à 1, 2, 3,..., n. Ici k peut avoir une quelconque des n valeurs 0, 1, 2, 3,...., $(n-1)$; mais chaque fois qu'un indice est supérieur à n, on doit le diviser par n et ne retenir que le reste de l'opération.

Nous obtenons de la sorte un arrangement pour $\left[n+\frac{1}{2}(n-1)\right]$ jours c'est-à-dire pour $\frac{1}{2}(3n-1)$ jours.

L'arrangement de trois élèves pour un jour est visible. Dès lors, au moyen du théorème de Walecki nous pourrons en déduire aussitôt un arrangement de 3^m enfants pour $\frac{1}{2}(3^m-1)$ jours. D'une façon plus générale, comme nous avons donné des solutions du problème pour le cas de $3n$ enfants quand $n = 1, 3, 5, 7, 9, 13$ et 15, il en résulte que, pour les mêmes valeurs de n, nour pouvons trouver des arrangements analogues pour $3^m \times n$ enfants.

Au théorème original, le professeur Sylvester [1] a ajouté comme corollaire que les quinze écolières devaient effectuer leurs promenades pendant 13×7 jours pour permettre à toutes les triades possibles de se trouver une seule fois en tête de ligne.

Le problème général consistant à trouver le plus grand nombre de manières de disposer x écolières se promenant en rangs de a de front, de telle sorte que toutes les combinaisons possibles de b

[1] *Philosophical Magazine*, juillet 1850, série 3, vol. XXXVII, p. 52 ; une solution par Sylvester est donnée dans le *Philosophical Magazine* de mai 1861, série 4, vol. XXI, p. 371.

d'entre elles marchant de compagnie se présentent une fois, mais une fois seulement, a été résolu pour plusieurs cas. Supposons que y soit ce nombre de dispositions. Il est évident que si les x écolières peuvent marcher chaque jour en rangs de a de front, x doit être un multiple de a et le nombre des rangs dans chaque promenade quotidienne est égal à $\frac{x}{a}$. Si un tel arrangement peut se reproduire pendant z jours, nous aurons la solution du problème consistant à promener pendant z jours x enfants disposés par rangs de a de front de manière que toutes les jeunes filles sortent à chaque promenade et que toutes les combinaisons possibles de b d'entre elles marchant de compagnie se présentent une fois seulement. Dans la généralisation correspondante du problème de Kirkman une élève quelconque ne peut être qu'une seule fois la compagne de promenade de toutes ses camarades, mais il ne s'ensuit pas nécessairement que toutes les combinaisons possibles de deux élèves se présentent une fois.

Un exemple pour lequel la solution est évidente est $x = 2n$, $a = 2$, $b = 2$, dans ce cas $y = n(2n - 1)$, $z = 2n - 1$.

En prenant $x = 15$, $a = 3$, $b = 2$, nous avons $y = 35$ et il se trouve que ces trente-cinq rangées peuvent être divisées en sept séries dont chacune contient tous les termes, par suite $z = 7$.

Plus généralement, avec $x = 5 \times 3^m$, $a = 3$, $b = 2$, on trouve

$$y = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{x}, \qquad z = \frac{1}{2}(x-1).$$

Il faut remarquer que dans les solutions du problème des quinze écolières et de l'extension donnée ci-dessus, chaque groupe possible de deux enfants se promène une fois, il en résulte donc que, dans ce cas, on aurait pu déterminer z aussi bien que y.

Les résultats mentionnés plus haut ont été donnés par Kirkman (¹)

(¹) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1850, vol. V, pp. 255-262.

en 1850. Dans le même mémoire il démontre que si p est un nombre premier, et si $x = p^m$, $a = p$, $b = 2$; on a : $y = \frac{p^m - 1}{p - 1}$.

Si $x = (p^2 + p + 1)(p + 1)$, en supposant que $p^2 + p + 1$ n'ait aucun diviseur moindre que $p + 1$, $a = p + 1$, $b = 2$; on a $y = \frac{x(x - 1)}{p(p + 1)}$.

Si $x = p^2 + p + 1$, $a = p + 1$, $b = 2$, alors $y = x$.

Et enfin, si $x = 15$, $a = 3$, $b = 3$; $y = 455$, $z = 91$ (Résultat de Sylvester).

Trois ans plus tard Kirkman ([1]) résolvait le problème pour $x = 2^n$, $a = 4$, $b = 3$.

Dernièrement, en 1893, M. Sylvester ([2]) a fait connaître une solution pour $x = 9$, $a = 3$, $b = 3$; dans ce cas $y = 84$, $z = 28$. Il a montré qu'une méthode identique s'appliquait au cas de $x = 3^m$, $a = 3$, $b = 3$; de sorte que neuf écolières peuvent faire vingt-huit promenades (soit quatre par jour pendant une semaine) de telle sorte que chaque jour un même couple ne se présente qu'une seule fois et, qu'à la fin de la semaine, chaque écolière s'est trouvée une seule fois avec tous les couples possibles de ses compagnes.

En 1867, M. S. Billy ([3]) montrait que : pour $x = 7$, $a = 3$, $b = 2$ on avait $y = 7$;

pour $x = 15$, $a = 3$, $b = 2$, on avait $y = 35$;

pour $x = 31$, $a = 3$, $b = 2$, on avait $y = 155$; et la méthode au moyen de laquelle il trouvait ces résultats donne la valeur de y, pour $x = 2^n - 1$, $a = 3$, $b = 2$.

Peu après, M. W. Lea ([4]) faisait voir que si $x = 11$, $a = 5$,

([1]) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1853, vol. VIII, pp. 38-42.
([2]) *Messenger of Mathematics*, février 1893, vol. XXII, pp. 159-160.
([3]) *Educational Times Reprints*, Londres, 1867, vol. VIII, pp. 32-33.
([4]) *Ibid.* 1868, vol. IX, pp. 35-36 ; et 1874, vol. XXII, pp. 74-76 ; — voir également le volume de 1869, vol. XI, p. 97.

$b = 4$, on avait $y = 66$; également $x = 16$, $a = 4$, $b = 3$, donne $y = 140$.

Ce dernier résultat est un cas particulier des théorèmes de Kirkman.

Il faut aussi faire remarquer que ces savants ne se limitèrent pas, dans leurs discussions, au cas où x est un multiple de a.

Récréations faites avec un jeu de cartes. — Nous avons déjà dit dans le premier chapitre de cet ouvrage que l'on pouvait se servir d'un jeu ordinaire de cartes pour expliquer plusieurs tours ou récréations dépendant des propriétés les plus simples des nombres, et dont beaucoup roulent sur la position relative que l'on fait prendre aux cartes. Le principe de la solution consiste à arranger le paquet de manière à amener la carte dans une position bien définie. Un tel arrangement constitue un façon particulière de battre les cartes.

Nous allons traiter successivement comme problèmes dépendant de la manière de disposer les cartes : *les arrangements en lignes et en colonnes, la détermination d'un couple de cartes choisies parmi* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *couples connus, le problème de Gergonne* et enfin le jeu connu sous le nom de *la Souricière.*

Le mélange des cartes. — L'opération de battre les cartes exécutée d'une façon régulière conduit toujours à un arrangement pouvant être calculé *a priori;* mais les tours qui en dépendent exigent généralement beaucoup d'adresse.

Supposons, par exemple, qu'on mélange un paquet de cartes en opérant de la manière suivante (qui est quelquefois usitée). On place la seconde carte sur la première, la troisième sous les deux, la quatrième au-dessus des trois, et ainsi de suite. La théorie de cette façon de battre les cartes est due à Monge [1]. Voici quelques-uns

[1] Les recherches de Monge sur le sujet se trouvent dans les *Mémoire de l'Académie des sciences*, Paris 1773, pp. 390-412.

Parmi ceux ayant fait de nouvelles études sur la question nous citerons

des résultats obtenus dont il n'est pas difficile de donner l'explication *a priori*.

Si le paquet contient $6p + 4$ cartes, la $(2p + 2)^{me}$ occupera la même position après l'opération qu'avant. Ainsi en battant un jeu complet de cinquante-deux cartes comme on vient de l'expliquer, la dix-huitième carte ne changera pas.

Ou encore, dans un paquet de $10p + 2$ cartes mélangées par ce procédé la $(2p + 1)^{me}$ carte changera de place avec la $(6p + 2)^{me}$; par exemple, avec un jeu d'écarté de trente-deux cartes, la septième carte deviendra la vingtième et la vingtième prendra la place de la septième.

Plus généralement, un seul mélange d'un jeu de $2p$ cartes amènera la carte occupant le rang x_0 au rang x_1, les nombres x_0 et x_1 étant liés entre eux par l'une ou l'autre des relations

$$x_1 = \frac{1}{2}(2p + x_0 + 1), \quad \text{ou } x_1 = \frac{1}{2}(2p - x_0 + 2),$$

suivant que x_0 est impair ou pair.

Les résultats précédents se déduisent de ces relations.

En appliquant successivement ces formules on peut voir que l'opération de mélanger les cartes m fois a pour effet d'amener la carte qui occupait primitivement le rang x_0, au rang x_m déterminé par la relation

$$2^{m+1} x_m = (4p + 1)(2^{m-1} \pm 2^{m-2} \pm \dots \\ \dots \pm 2 \pm 1) \pm 2x_0 + 2^m \pm 1,$$

le signe à employer dépendant de la parité de m.

Dans un paquet de n cartes, après un certain nombre de mé-

particulièrement V. Bouniakowski : *Bulletin physico-mathématique* de Saint-Pétersbourg, 1857, vol. XV, pp. 202-205, dont les recherches ont été résumées dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, 1858, pp. 66-67 ; T. de Saint-Laurent : *Mémoires de l'Académie du Gard*, 1865 ; L. Tanner : *Educational Times Reprints* 1880, vol. XXXIII, pp. 73-75 ; et M. J. Bourget, dans le *Journal de Liouville*, 1882, pp. 413-434. Les solutions données par le Prof. Tanner sont simples et concises.

langes, ne surpassant pas n, les cartes reprennent leur position initiale. C'est ce qui arrive toujours aussitôt que la carte qui se trouvait au-dessus à l'origine est revenue occuper cette place. Pour déterminer le nombre de mélanges qu'il est nécessaire d'effectuer avec un paquet de $2p$ cartes, il suffit de poser $x_m = x_0$ et de chercher la plus petite valeur de m satisfaisant à l'équation résultante pour toutes les valeurs de x_0, de 1 à $2p$. Il s'ensuit que si m est le plus petit nombre pour lequel $4^m - 1$ est divisible par $4p + 1$, m mélanges sont nécessaires lorsque l'une ou l'autre des expressions $2^m + 1$, $2^m - 1$ est divisible par $4p + 1$, dans le cas contraire l'opération exige $2m$ mélanges.

Pour un paquet de $2p + 1$ cartes, le nombre de mélanges est le même que pour un paquet de $2p$ cartes.

Avec un jeu d'écarté de trente-deux cartes, six mélanges suffisent ; avec un paquet de 2^n cartes, $n + 1$ mélanges suffisent ; avec le jeu complet de 52 cartes, il faut faire 12 mélanges ; avec un paquet de 13 cartes, dix mélanges sont suffisants tandis qu'avec un paquet de cinquante cartes il en faut cinquante ; et ainsi de suite.

M. W. H. Hudson (1) a également montré que, quelle que soit la loi du mélange, si on le répète d'une façon constante en opérant sur un paquet de n cartes, ces cartes reprennent finalement leur position primitive après un nombre de mélanges ne surpassant pas le plus grand possible plus petit multiple commun de tous les nombres dont la somme est égale à n.

Car supposons qu'une certaine position soit occupée après le premier, le deuxième...., le p^{me} mélange, respectivement par les cartes A_1, A_2, A_3,..., A_p, et qu'au début, cette position soit celle de la carte A_0. Supposons de plus qu'après le p^{me} mélange, A_0 reprenne sa position initiale, par suite $A_0 = A_p$. Mais, après le second mélange A_2 prend la place de A_1 pour la même raison que A_1 a pris celle de A_0 après le premier mélange ; il s'ensuit donc qu'avant ce mélange A_2 occupait la place prise par A_1 avant le premier mélange.

(1) *Educational Times Reprints*, Londres 1865, vol. II, p. 105.

Par conséquent, les cartes qui, après les mélanges successifs prennent la place occupée primitivement par A_1 sont A_2, A_3,..., A_p, A_1 ; c'est-à-dire, qu'après le p^{me} mélange A_1 reprend sa place initiale. Il en est donc de même de toutes les autres cartes A_2, A_3,..., $A_p - 1$.

Ainsi, les cartes A_1, A_2,..., A_p forment un cycle de p cartes ; l'une ou l'autre d'entre elles occupe toujours l'une ou l'autre de p positions dans le paquet et elles passent par toutes ces positions après p mélanges. Divisons ainsi le nombre n des cartes en cycles de $p,q,r,..,$ cartes, la somme $p + q + r +,...,$ étant égale à n, alors le plus petit multiple commun de $p,q,r,...,$ représente le plus grand nombre de mélanges qu'il est nécessaire d'effectuer avant que toutes les cartes aient repris leurs positions initiales.

On trouve après quelques essais que dans le cas d'un paquet de cinquante-deux cartes, le plus grand plus petit multiple commun des nombres dont la somme est égale à 52, est 180 180.

Les développements qui précèdent permettent de suivre facilement l'intéressante récréation suivante.

On prend un jeu de 52 cartes que l'on dispose suivant un ordre déterminé : par exemple les 13 cœurs en ordre as, deux, trois,... , roi, puis à la suite les 13 piques, les 13 carreaux et enfin les 13 trèfles, dans le même ordre que les cœurs.

Toutes les faces étant en dessous, la première carte du dessus du jeu est le roi de cœur et la cinquante deuxième carte l'as de trèfle.

Cela fait, on bat les cartes une à une comme il est expliqué ci-dessus et cela autant de fois qu'on le demande.

Nous avons vu comment on pouvait déterminer après chaque mélange le rang occupé par une carte quelconque connaissant son rang initial.

On donne maintenant à couper autant de fois qu'on le désire et on a soin de regarder la dernière carte du jeu, une fois les coupes terminées.

Supposons que les cartes aient été battues, comme nous l'avons dit, 3 fois, et que la dernière carte du jeu soit le 7 de carreau.

Les cartes sont alors disposées une à une sur une table, en commençant par celle du dessus, de manière à former 4 rangées de 13 cartes chacune, sans retourner une seule carte.

La récréation consiste :

1° A déterminer la position d'une carte quelconque, par exemple du valet de cœur, c'est-à-dire à faire connaître la rangée où se trouve cette carte et le n° qu'elle occupe dans cette rangée en comptant de gauche à droite.

2° A nommer la carte qui occupe un n° donné dans une rangée désignée, par exemple le n° 3 de la troisième rangée.

On commence par déterminer le rang qu'aurait dû régulièrement occuper le 7 de carreau, après les 3 battues successives, si on n'avait pas fait couper le jeu.

Au début du jeu le 7 de carreau était au rang 33.

Après la 1re battue cette carte a pris, le rang déterminé par la relation

$$x_1 = \frac{1}{2}(2p + x_1 + 1) = \frac{1}{2}(52 + 34) = 43.$$

Après la 2me battue, le rang de cette carte est devenu

$$\frac{1}{2}(52 + 43 + 1) = 48$$

et après la 3me battue son rang est

$$\frac{1}{2}(52 - 48 + 2) = 3.$$

Car nous avons constaté la présence du 7 de carreau au 42me rang, il en résulte donc que les coupes successives ont eu pour effet de faire *reculer* cette carte de $52 - 3 = 49$ rangs ou, ce qui revient au même, de la faire *avancer* de 3 rangs.

Il en est de même de toutes les cartes du jeu qui se trouvent ainsi déplacées d'une quantité *constante*.

Cela posé abordons les deux questions proposées.

1er problème. — Il s'agit de trouver où est le valet de cœur

rang du valet de cœur au début 3

« « « après la 1re battue $\frac{1}{2}(52 + 3 + 1) = 28$

« « « après la 2me « $\frac{1}{2}(52 - 28 + 2) = 13$

« « « après la 3me « $\frac{1}{2}(52 + 13 + 1) = 33$

ainsi le valet de cœur occupait le 33me rang après la 3me battue, et comme les coupes ont eu pour effet de le reculer des 49 rangs ou de l'avancer de 3 rangs, son rang final est

$$33 + 49 = 82 = 52 + 30$$

ou

$$33 - 3 = 30.$$

Le valet de cœur est donc la 4me carte de la troisième rangée.

2me *problème.* — C'est la question inverse.

Nommer la carte occupant le n° 3 de la 3me rangée.

Cette carte est la 29me.

Or, elle a été avancée de 3 rangs par suite des coupes, elle était donc la 29 + 3 = 32me après la 3me battue.

Comme 32 × 2 est plus grand que 52, le rang x_0 de la carte au commencement de la 3me battue ou à la fin de la 2me battue, sera donné par la relation

$$32 = \frac{1}{2}(52 + x_0 + 1) \quad \text{d'où} \quad x_0 = 64 - 53 = 11.$$

11 × 2 étant plus petit que 52, le rang de la carte au commencement de la 2me battue ou à la fin de la 1re battue est donné par la relation

$$11 = \frac{1}{2}(52 - x_0 + 2) \quad \text{d'où} \quad x_0 = 54 - 22 = 32.$$

Enfin, le rang de la carte avant la 1re battue sera

$$32 \times 2 - 53 = 64 - 53 = 11,$$

La carte était donc au 11me rang au début.

Or, la carte occupant ce rang est le 3 de cœur, donc la 3me carte de la 3me rangée est le 3 de cœur.

Arrangement des cartes en lignes et en colonnes. — Un tour assez connu et qui peut être considéré comme une façon de mélanger les cartes, repose sur ce fait évident que lorsqu'on dispose n^2 cartes en carré (de n rangées contenant chacune n cartes) chacune d'elles sera parfaitement déterminée connaissant la rangée et la colonne dans laquelle elle se trouve.

On exécute généralement le tour comme il suit : on demande d'abord dans quelle rangée se trouve la carte choisie et on note la première carte à gauche de cette ligne. Les cartes de chaque colonne sont alors prises, une à une (faces découvertes), en commençant par la carte du haut et sans déranger l'ordre des colonnes, de la gauche à la droite, chaque carte ramassée étant placée au fur et à mesure sur le paquet. Renversant alors le paquet, on dispose de nouveau les cartes, faces apparentes, en rangées (de gauche à droite en commençant par l'angle supérieur de gauche) et on demande à la personne qui a choisi la carte de désigner le rang dans lequel elle se trouve. La carte choisie sera à la rencontre du rang désigné et de la colonne verticale commençant par la carte notée qui se trouvait la première à gauche dans le rang indiqué lors de la première disposition.

Nous venons de décrire la manière usuelle de présenter la récréation, mais on y ajoute de l'intérêt en faisant couper le paquet de cartes autant de fois qu'on le désire avant de les distribuer pour la seconde fois, puis en opérant soi-même une coupe à la fin, de façon que la première carte dans le paquet soit une de celles qui se trouvaient dans la première rangée.

L'explication est très simple. Supposons un paquet de seize cartes, les figures 51 et 52 ci-dessous représentent le premier et le second arrangements. Par exemple, si, dans la figure 1, la carte choisie est dans le troisième rang, c'est évidemment une de celles

portant les numéros 9, 10, 11 ou 12 ; dès lors cette carte se trouve forcément déterminée, connaissant le rang de la seconde figure dans lequel elle se trouve :

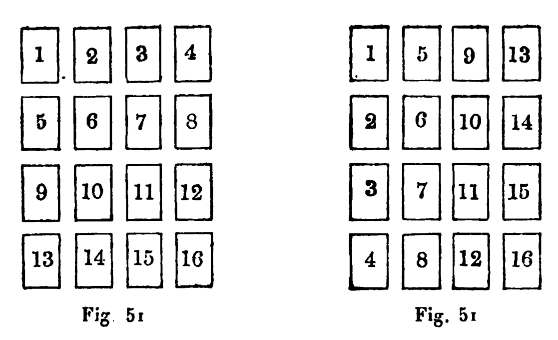


Fig. 51 Fig. 51

Si on fait couper les cartes avant de les disposer pour la seconde fois sur la table, il faut s'assurer d'une façon ou d'une autre que la première carte est un, deux, trois ou quatre ; dans ce cas les cartes dans chaque rangée de la figure 52 ne seront pas modifiées bien que la position relative des rangées puisse changer.

Détermination de deux cartes choisies parmi $\frac{1}{2} n (n + 1)$ couples donnés (1). — Un autre tour assez commun consiste à disposer sur une table vingt cartes par tas de deux, en invitant une personne de la société à en choisir un. On ramasse alors les cartes et on les place d'une certaine façon sur quatre rangs de chacun cinq cartes. La connaissance du rang ou des rangs où se trouvent les deux cartes pensées permet de les déterminer immédiatement.

C'est une conséquence de ce fait que le nombre des produits homogènes à deux dimensions que l'on déduit de quatre éléments est égal à dix. Par suite, les produits homogènes à deux dimensions déduits de quatre éléments peuvent servir à la détermination de dix éléments.

(1) Bachet. — Problème XVII, avertissement, p. 146 et suivantes.

Plaçons donc sur une table dix couples de cartes en priant une personne d'en choisir un ; puis ramassons toutes les cartes par couple sans les séparer, le premier couple donnant les deux premières cartes du paquet, le second couple les deux suivantes, et ainsi de suite. Les cartes sont alors disposées en quatre rangées de chacune cinq cartes suivant le diagramme ci-dessous.

Les cartes (1) et (2) du premier couple sont mises dans la première rangée ; des cartes (3) et (4) constituant le second couple, on met la première (3) à la suite de (2) dans la première rangée, et la seconde (4) dans la seconde rangée, sous (1). Des cartes (5) et (6) formant le troisième couple, on place la première (5) à la suite de (3) dans la première rangée et la seconde (6) dans la troisième rangée, sous (4) ; et ainsi de suite, comme le représente la figure 53. La première rangée une fois remplie, on procède de même sur la seconde rangée, et ainsi de suite.

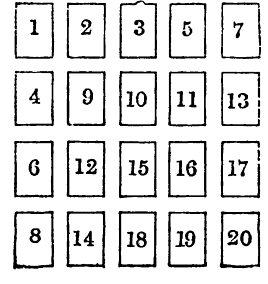


Fig. 53

On se fait alors indiquer la ou les rangées contenant les cartes choisies ; si on ne désigne qu'une seule rangée, la m^{me} par exemple, celles-ci seront la m^{me} et la $(m+1)^{me}$ carte de la ligne indiquée. Ces emplacements sont appelés les clefs de la ligne. Dans le cas où les cartes se trouvent dans deux rangées, la p^{me} et la q^{me} par exemple, on procède comme il suit : supposons $q > p$; alors la carte choisie contenue dans la q^{me} ligne sera la $(q-p)^{me}$ au-dessous de la première clef de la p^{me} ligne. L'autre carte choisie qui se trouve dans la p^{me} ligne est la $(q-p)^{me}$ à la droite de la seconde clef.

La règle de Bachet sous la forme que nous venons de la présenter s'applique à un paquet de $n\,(n+1)$ cartes groupées par couples et disposées en n lignes contenant chacune $n+1$ cartes ; car nous avons $\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ couples, et on peut également former

$\frac{1}{2}n(n+1)$ produits homogènes à deux dimensions avec n éléments. Bachet donne des figures pour les cas de vingt, trente et quarante cartes, que le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à construire lui-même; et la façon dont nous avons exposé le problème pour vingt cartes rend suffisamment compte de la marche à suivre.

Nous avons vu la même récréation reproduite en se servant comme guide d'une sentence au lieu de nombres. Considérons, par exemple, le cas de dix couples, après avoir ramassé les cartes, on les dispose en quatre lignes contenant chacune cinq cartes suivant l'ordre indiqué par cette phrase.

Matas dedit nomen Cocis,

Cette sentence est supposée écrite sur la table, chaque mot formant une ligne. La première carte est placée sur l'*m* de *matas*, la carte suivante (qui est la seconde du premier couple) doit couvrir la seconde lettre *m*, et sera, par suite, placée sur l'*m* de *nomen* dans la troisième ligne. La troisième carte est placée sur la lettre *a* du mot *matas*, la quatrième carte (qui est la seconde du second couple) doit couvrir la même lettre et sera, en conséquence, placée sur la seconde lettre *a* du même mot ; ces deux cartes sont donc dans la première ligne. Les deux cartes suivantes (troisième couple) doivent couvrir la lettre *t* de *matas* et la même lettre *t* qui se trouve dans le mot *dedit* de la seconde ligne ; et ainsi de suite. On se fait maintenant indiquer le ou les rangs contenant les cartes pensées. Si on désigne deux rangs, les deux cartes sont sur la lettre commune aux deux mots qui constituent ces lignes. Si on ne désigne qu'une ligne, les cartes couvrent la lettre qui figure deux fois dans le mot de la ligne indiquée.

Le raisonnement saute aux yeux : désignons chaque couple de cartes par les lettres *a*, *e*, *i*, *o*, *c*, *d*, *m*, *n*, *s* ou *t* respectivement, et remarquons que la sentence *matas dedit nomen Cocis* contient quatre mots de chacun cinq lettres, soit en tout vingt lettres, mais seulement dix lettres différentes, puisque chaque lettre est prise deux fois.

Dès lors, si deux lignes, ou ce qui revient au même, deux mots sont désignés, il s'agit de deux mots ayant une lettre commune, et si, au contraire, on n'en désigne qu'un seul, c'est un de ceux contenant deux fois la même lettre.

Pour reproduire le tour avec un autre nombre de cartes, il suffirait d'imaginer une phrase dans le genre de celle reproduite plus haut.

Le nombre des produits homogènes à trois dimensions pouvant être formés avec quatre éléments est 20, parmi ceux-ci le nombre de produits dans lesquels trois éléments sont différents est 8. Nous pouvons en déduire une récréation analogue à celle que nous venons d'exposer avec huit trios de cartes ou d'objets quelconques. Les cartes peuvent être disposées suivant l'ordre indiqué par la phrase

Lanata leveté livini novoto.

Nous pensons que ces arrangements au moyen de sentences sont bien connus, et ce serait certainement perdre son temps que d'en chercher l'origine.

Problème des paquets de cartes de Gergonne. — Avant de discuter le théorème de Gergonne, nous examinerons le problème bien connu des trois paquets dont l'explication est une conséquence de celui de Gergonne.

Le problème des trois paquets (1). — Ce tour s'exécute généralement de la manière suivante : On prend un paquet de vingt-sept cartes que l'on distribue sur une table, les faces apparentes en trois paquets de chacun neuf cartes, mais en effectuant la distribution comme il suit : les trois premières cartes du paquet total des vingt-sept cartes sont respectivement au premier rang dans chaque paquet partiel de neuf cartes ; les trois cartes suivantes du paquet

(1) Cette récréation est mentionnée par Bachet, problème XVIII, p. 143, mais l'analyse qu'il en présente est insuffisante.

total sont respectivement au deuxième rang dans chacun des paquets de neuf cartes, et ainsi de suite. Nous supposons de plus que les cartes sont toujours tenues dans la main les faces vues. Le résultat serait modifié si on adoptait un autre mode de distribution.

On prie alors une personne présente de bien remarquer les cartes au fur et à mesure qu'elles tombent et d'en choisir une par la pensée.

Le problème consiste à déterminer cette carte pensée.

Pour cela, on demande à la personne dans quel paquet se trouve la carte choisie et en ramassant les cartes on place le paquet désigné entre les deux autres.

On recommence la distribution en opérant comme plus haut et en invitant la personne à bien observer le paquet dans lequel se trouve la carte pensée.

Ce paquet désigné, on ramasse de nouveau les cartes en plaçant encore le paquet en question entre les deux autres, puis on fait une troisième fois la distribution en notant bien la carte du milieu dans chaque paquet. Ceci fait, et le paquet dans lequel se trouve la carte étant montré, on peut affirmer que la carte choisie est celle du milieu.

On connaît cette carte et, par suite, on peut terminer la récréation comme on l'entend. Le plus généralement (bien que ce ne soit pas très habile), on réunit une dernière fois toutes les cartes en plaçant toujours au milieu le paquet désigné.

La carte choisie occupe alors le rang $9 + 5 = 14$ à partir de la carte du dessus.

Le tour est souvent exécuté avec quinze cartes ou avec vingt-et-une cartes, la règle s'applique à ces deux cas.

Généralisation de Gergonne. — Gergonne [1] a donné la théorie générale de la question pour un paquet de m^m cartes.

[1] *Annales de Mathématiques de Gergonne*, Nîmes 1813-4, vol. pp. 276-283.

Supposons que les cartes soient distribuées conformément à la règle donnée plus haut en m paquets contenant chacun $\frac{m^m}{m} = m^{m-1}$ cartes. Après la première distribution, le paquet désigné comme contenant la carte choisie est placé au a^{me} rang, après la seconde distribution, le paquet renfermant la carte pensée est placé au b^{me} rang, et ainsi de suite ; finalement, après la m^{me} distribution, le paquet où se trouve la carte est placé au k^{me} rang. Alors, une fois les cartes réunies en un seul paquet après la m^{me} distribution, le rang n de la carte choisie, en comptant à partir de la carte du dessus, est donné par la relation $n = k.m^{m-1} - j.m^{m-2} + \ldots\ldots + b.m - a + 1$, si m est pair et par la relation $n = k.m^{m-1} - j.m^{m-2} + \ldots\ldots - b.m + a$, si m est impair.

Prenons, par exemple, un paquet de 256 cartes (ce qui revient à faire $m = 4$) ; si une personne est invitée à choisir une carte, elle pourra être déterminée en faisant quatre distributions successives en quatre paquets de chacun soixante-quatre cartes et en demandant, après chaque distribution, le paquet dans lequel se trouve la carte pensée.

En voici la raison : après le premier partage en quatre paquets, on sait que la carte choisie se trouve parmi les soixante-quatre de de l'un des paquets. Après la seconde distribution, ces soixante-quatre cartes sont réparties également entre quatre paquets et, par suite, la connaissance du paquet qui contient la carte pensée nous permet d'affimer qu'elle est parmi seize cartes déterminées de ce paquet. Après la troisième distribution, on sait qu'elle figure parmi quatre cartes connues, et enfin, la quatrième distribution nous fixe exactement sur la carte en question.

De plus, en opérant sur un paquet de 256 cartes, l'ordre dans lequel on ramasse les paquets après chaque distribution est indifférent. Car, supposons que le paquet contenant la carte choisie soit successivement placé au a^{me}, au b^{me}, au c^{me} et au d^{me} rangs, après chaque distribution, cette carte occupera dans le paquet formé, en dernier lieu, après la quatrième distribution, le $(64.d - 16.c +$

$4.b - a + 1)^{me}$ rang à partir de la carte du dessus, elle sera donc parfaitement déterminée. Il n'est même pas nécessaire de ramasser les cartes après la quatrième distribution, car le même raisonnement montre que la carte choisie est la $(64 - 16.c + 4b - a + 1)^{me}$ dans le paquet où elle se trouve. Ainsi, pour $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$ et $d = 2$, la carte choisie est la soixante-deuxième dans le paquet qui la contient après la quatrième distribution, et elle est la cent-vingt-sixième dans le paquet formé en ramassant toutes les cartes.

On peut se servir exactement de la même manière d'un paquet de 27 cartes et trois distributions successives, consistant chacune à former trois paquets de neuf cartes, suffiront pour déterminer la carte pensée. Si, après chaque distribution, le paquet contenant la carte choisie est classé successivement le a^{me}, le b^{me} et le c^{me}, alors la carte pensée sera la $(9c - 3b + a)^{me}$ dans le dernier paquet formé de toutes les cartes, ou la $(9 - 3b + a)^{me}$ dans le paquet qui la contient après la troisième distribution.

Le principe de la démonstration étant toujours le même, nous nous contenterons de la présenter pour le cas de $m = 3$, c'est-à-dire pour le cas d'un paquet de 27 cartes distribuées en trois paquets de neuf cartes chacun.

Supposons qu'après la première répartition, le paquet contenant la carte choisie soit placé au rang a dans le paquet total. Alors ce paquet total se trouve ainsi constitué : 1° il commence par $a - 1$ petits paquets contenant chacun neuf cartes ; 2° à la suite, viennent neuf cartes dont l'une d'elles est la carte pensée ; 3° il se termine par les derniers tas ramassés.

Les cartes sont distribuées une seconde fois : dans chaque tas formé, les $3\ (a - 1)$ premières cartes proviennent de la première partie du paquet total, les trois cartes suivantes sont données par la seconde partie, et les cartes supérieures, $9 - 3\ a$, sont fournies par la troisième partie.

Supposons, maintenant, que le tas dans lequel se trouve la carte choisie soit classé le b^{me}. Le nouveau paquet total des cartes est composé comme il suit :

1° Le paquet commence par $9(b-1)$ cartes; 2° au-dessus se placent $(9-3a)$ cartes; puis, 3° viennent trois cartes parmi lesquelles figure la carte pensée; et enfin, 4° le paquet se termine par les cartes restantes.

Les cartes sont distribuées une troisième fois; dans chaque tas, les $3(b-1)$ cartes du dessous proviennent de la première partie (1°), les $(3-a)$ cartes suivantes sont fournies par la seconde partie (2°), la carte suivante est une des trois classées dans (3°), et les dernières cartes, au nombre de $8-3b+a$, proviennent de la partie (4°).

Dès lors, si, après cette distribution, on indique le paquet dans lequel figure la carte choisie, elle sera la $(9-3b+a)^{me}$, à partir de celle du dessus. Mais si on ramasse une dernière fois les paquets en plaçant au rang c celui qui contient la carte pensée, cette carte occupera le rang $9(c-1)+(8-3b+a)+1$, à partir de la première du paquet, c'est-à-dire qu'elle sera la $(9c-3b+a)^{me}$.

Puisque le rang de la carte choisie est connu dans le paquet qui la contient, après la troisième distribution, il est facile de la reconnaître et la récréation peut se terminer d'une façon plus intéressante qu'en ramassant toutes les cartes pour les abattre de nouveau.

En supposant que le paquet contenant la carte pensée soit toujours placé au milieu, on a : $a=2$, $b=2$, $c=2$, par suite, $n=9.c-3b+a=14$, et nous retrouvons le tour tel qu'on l'exécute généralement et tel que nous l'avons décrit plus haut.

Nous venons de faire voir que les quantités a, b, c, étant connues, le rang n de la carte se trouvait déterminé, mais la règle peut être modifiée de façon à faire occuper à la carte pensée un rang assigné, le rang n, par exemple.

La question revient à trouver les valeurs de a, b, c, satisfaisant à l'équation

$$n=9c-3b+a,$$

dans laquelle les quantités a, b, c, ne peuvent prendre que les trois valeurs, 1, 2 ou 3.

Il résulte de là, qu'en divisant n par 3, le reste de l'opération est 1 ou 2, ce reste représente donc a ; mais si n est exactement divisible par 3, le reste étant o, on diminue le quotient d'une unité en prenant pour reste 3, dans ce cas $a = 3$. En d'autres termes, a est le plus petit nombre positif (o étant excepté), qui doit être retranché de n pour que la différence soit multiple de 3. Représentons par p ce multiple, p est le nombre entier le plus voisin de $n/3$; on a :

$3p = 9c - 3b$, d'où $p = 3c - b$; dès lors b est le plus petit nombre positif (o étant excepté), qui, ajouté à p, donne pour somme un multiple de 3, et c est ce multiple.

Deux exemples vont rendre tout ceci bien plus clair. Admettons que l'on demande que la carte pensée sorte la vingt-deuxième à partir de celle du dessus ; dans ce cas $22 = 9c - 3b + a$. Le plus petit nombre qui, retranché de 22, laisse une différence divisible par 3 est 1, donc $a = 1$.

Ainsi, $22 = 9.c - 3.b + 1$, ou $7 = 3c - b$; le plus petit nombre à ajouter à 7 pour avoir un multiple de 3 est 2, donc $b = 2$, alors $7 = 3c - 2$, $c = 3$.

En résumé, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Second exemple : proposons-nous d'amener la carte pensée au vingt-et-unième rang ; alors $21 = 9.c - 3b + a$.

a étant le plus petit nombre à retrancher de 21 pour que la différence soit divisible par 3, on a : $a = 3$ et il en résulte $21 - 3 = 9\,c - 3.b$ ou $6 = 3.c - b$;

b est le plus petit nombre à ajouter à 6 pour avoir un multiple de 3, donc $b = 3$, et $c = 3$.

Ainsi, dans ce cas, $a = 3$, $b = 3$, $c = 3$.

Dans le cas où l'application de cette règle présenterait des difficultés, on peut opérer comme il suit :

Posons $a = x + 1$, $b = 3 - y$ et $c = z + 1$, x, y et z ne peuvent prendre que les valeurs o, 1 ou 2.

Dans ce cas, l'équation de Gergonne prend la forme

$$9.z + 3.y + x = n - 1$$

d'où cette conclusion qu'en exprimant le nombre $n - 1$ dans le système de numération à base 3, les nombres x, y, z et, par suite, a, b, c se trouveront déterminés.

La règle, dans le cas d'un paquet de m^m cartes est exactement semblable. Si l'on désire faire sortir la carte pensée à un rang assigné à l'avance, le problème consiste à déterminer les quantités a, b, c,...., k, dans la formule de Gergonne, connaissant n. On peut y arriver en divisant n successivement par m et en partant de cette convention que les restes seront alternativement positifs et négatifs, sans que leurs valeurs numériques puissent surpasser m, ni être inférieures à 1.

Le même problème peut aussi se faire avec un paquet de $l.\, m$ cartes. Dr C. T. Hudson et M. L. E. Dickson (1) ont discuté le cas général en supposant le paquet distribué n fois en l paquets de chacun m cartes et ils ont donné l'ordre dans lequel les divers petits tas devaient être disposés en les ramassant pour amener la carte pensée à occuper le n^{me} rang à partir de celle du dessus, après la n^{me} distribution.

Un exemple traité de la même manière que ceux déjà examinés rendra suffisamment compte du principe général de la méthode. Considérons un jeu d'écarté de trente-deux cartes distribuées en quatre tas de chacun huit cartes et supposons que le tas contenant la carte choisie soit placé au rang a. Si, en faisant une nouvelle distribution en quatre tas, on désigne l'un d'eux comme contenant la carte pensée, cette carte ne pouvant être l'une des $2(a - 1)$ cartes du dessous du paquet, ni l'une des $(8 - 2a)$ du dessus, sera nécessairement une des deux intermédiaires. Le tour peut alors se terminer de bien des façons, par exemple en utilisant le procédé ambigu et bien connu des prestidigitateurs, c'est-à-dire en demandant à une personne de choisir l'une des deux cartes, sans dire à l'avance si la carte désignée sera retenue ou rejetée.

La souricière. — Nous terminons ce chapitre en mentionnant

(1) *Educational Times Reprints*, 1868, vol. IX, pp. 89-91; et *Bulletin de l'American mathematical Society*, New-York, mai 1895, vol. I, pp. 184-186.

simplement un autre jeu de cartes connu sous le nom de « la souricière » et dont la discussion complète par l'analyse algébrique ne laisse pas que d'offrir de réelles difficultés.

Voici comment il se pratique : des cartes portant les n°s 1, 2, 3,... n sont disposées en rond dans un ordre quelconque et les faces apparentes; un joueur, partant de l'une d'entre elles et marchant toujours dans le même sens, compte successivement 1, 2, 3,...., en touchant chaque carte. Si la k^{me} carte touchée porte le numéro k, il fait ce qu'on appelle *une réussite*, il prend alors cette carte et recommence à compter. D'après Cayley, le joueur gagne si, en opérant comme nous venons de le dire, il enlève successivement toutes les cartes, il perd si, chaque fois qu'il compte jusqu'à n, il n'enlève aucune carte.

Considérons, par exemple, le cas de quatre cartes seulement disposées dans cet ordre 3214 ; le joueur partant de 3 et marchant dans le sens des aiguilles d'une montre fera une première réussite sur 2, puis une autre sur 1 en recommençant à compter, mais il ne fera évidemment aucune autre réussite en continuant le jeu. Si les cartes étaient primitivement disposées dans cet ordre 1, 4, 2, 3, le joueur les enlèverait toutes successivement dans l'ordre 1, 2, 3, 4.

On peut étudier la question en se proposant de déterminer les réussites possibles avec un nombre donné de cartes ainsi que le nombre de ces réussites, et quelles sont les permutations fournissant un certain nombre de réussites dans un ordre fixé.

Cayley [1] a montré qu'il y a neuf arrangements d'un paquet de quatre cartes ne donnant naissance à aucune réussite, sept arrangements ne fournissent qu'une réussite, trois arrangements en donnent deux, et cinq arrangements conduisent à quatre réussites.

Le Prof. Steen [2] a discuté la théorie pour le cas d'un paquet de n cartes. Il a fait voir comment il était possible de déterminer : 1° le nombre d'arrangements dans lesquels la première réussite se

[1] *Quarterly Journal of Mathematics*, 1878, vol. XV, pp. 8-10.
[2] *Quarterly Journal of Mathematics*, 1878, vol. XV, pp. 230-241.

fait sur le nombre x (art. 3-5) ; 2° le nombre d'arrangements dans lesquels la première réussite se fait sur 1 et la seconde sur x (art. 6) ; 3° et le nombre d'arrangements pour lesquels 2 est la première et x la seconde réussite (art. 7-8). La théorie en est restée là. Dernière remarque : il est évident que s'il se produit n — 1 réussites, la n^{me} s'en suivra forcément.

Jeu des treize. — Le jeu français *des treize* présente beaucoup d'analogie avec le précédent.

Il se joue avec un jeu complet de cinquante-deux cartes) les valets, les reines et les rois étant respectivement comptés pour 11, 12 et 13). Le joueur compte à haute voix 1, 2, 3,..., 13 en abattant la première, la seconde, la troisième et la treizième carte. Avant la donne, il offre de parier qu'il amènera une réussite dans les treize cartes qu'il va abattre successivement.

On trouve des jeux de patience basés sur le même principe.

CHAPITRE VIII

DES CARRÉS MAGIQUES

Etant donné un carré divisé en un certain nombre de petits carrés égaux, on appelle *carré magique* une suite de nombres entiers inscrits dans toutes les cases et disposés de telle sorte que la somme de tous les nombres compris dans chaque ligne horizontale, dans chaque colonne verticale, et dans chaque diagonale, soit constante.

Le carré constitué avec la suite naturelle des nombres entiers de 1 à n^2 est appelé carré du n^{me} ordre et l'on voit aisément que, dans ce cas, la somme des nombres dans chaque rangée, colonne ou diagonale, est égale à $\frac{1}{2} n(n^2 + 1)$.

Nous représenterons cette expression par N.

Nous limiterons notre exposé à la description des carrés magiques formés par la suite naturelle des nombres entiers en partant de 1.

Ainsi, les seize premiers nombres, disposés suivant l'une ou

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 54

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 55

l'autre les deux figures 54, 55, nous donnent le carré magique du quatrième ordre dans lequel la somme des nombres de chaque colonne ou diagonale est égale à 34.

De même, les figures 56 et 58 de la page 159, la figure 61 de la page 163, les figures 66 et 67 de la page 176 nous offrent des exemples de carrés magiques du cinquième ordre. La figure 65 de la page 172 est un carré magique du sixième ordre. Les figures 77 et 78 des pages 185 et 187 sont des carrés magiques du 8me ordre.

La formation des carrés magiques est un vieil amusement, et à une époque où l'on attribuait à certains nombres particuliers des propriétés cabalistiques, il était assez naturel de supposer de tels arrangements doués de vertus magiques.

Des carrés magiques d'ordre impair furent construits dans les Indes avant l'ère chrétienne suivant une loi de formation qui sera expliquée un peu plus loin. Leur introduction en Europe semblerait due à Moschopoulos qui vivait à Constantinople au commencement du xve siècle, et qui fit connaître deux méthodes pour construire de tels carrés. La majorité des astrologues et des physiciens du moyen âge étaient intimement convaincus de l'importance de ces arrangements. Le fameux Cornelius Agrippa (1486-1535) en particulier, construisit des carrés magiques des ordres 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui représentaient symboliquement les sept « planètes » des astrologues de l'époque : Saturne, Jupiter, Mars, le Soleil, Vénus, Mercure et la Lune. Pour lui, le carré ne comprenant qu'une case dans laquelle le nombre 1 était inscrit symbolisait l'unité et l'éternité de Dieu, et de ce que le carré du second ordre, c'est-à-dire de quatre cases, ne pouvait être construit, il en concluait l'imperfection des quatre éléments, l'air, la terre, le feu et l'eau ; des écrivains plus récents ont ajouté qu'un tel carré symbolisait le péché originel. Un carré magique gravé sur une tablette d'argent était quelquefois recommandé comme un charme contre la peste. Le carré magique représenté par la figure 54 un peu plus haut, figure sur une gravure sur bois intitulée « Mélancolie » faite vers l'an 1500 par le célèbre peintre de Nuremberg, Albert Düser. Dans certaines régions de l'Orient on porte encore des amulettes de cette forme.

La théorie des carrés magiques a été principalement étudiée et

développée par les mathématiciens français. Bachet a donné pour construire un carré magique quelconque, d'ordre impair, une règle qui est, en substance, l'une de celles présentées par Moschopoulos. La formation des carrés magiques. principalement de ceux d'ordre pair, a été traitée par Frénicle et par Fermat. Cette étude fut reprise et continuée par Poignard, De la Hire, Sauveur, D'Ons-en-bray, et Des Ourmes. Dans son ouvrage, Ozanam a introduit un essai sur les carrés magiques qui a été complété par Montucla. Les renseignements contenus dans ce chapitre sont, en grande partie, empruntés aux travaux de Montucla et De la Hire. Comme la plupart des problèmes d'algèbre, la construction des carrés magiques occupa Euler, mais il n'apporta aucun perfectionnement à la théorie générale. En 1837, un ouvrage très étudié et très complet fut publié par B. Violle ; il est utile à consulter à cause du grand nombre d'exemples qu'on y trouve. Nous résumons dans une note toutes nos références [1].

Nous nous bornons dans ce qui suit à établir les règles de cons-

[1] Bachet. — *Problèmes plaisans*, Lyon, 1624, problème XXI, p. 161. — Frénicle : *Divers ouvrages de Mathématiques par Messieurs de l'Académie des Sciences*, Paris, 1693, pp. 423-483 ; avec un appendice (pp. 484-507), contenant les figures de tous les carrés magiques possibles du quatrième ordre, au nombre de 880. — Fermat : *Opera Mathematica*, Toulouse, 1679, pp. 173-178 ; ou *Précis* de Brassinne, Paris, 1853, pp. 146-149. — Poignard : *Traité des Quarrés sublimes*, Bruxelles, 1704. — De la Hire : *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1705, Paris, 1706, part. I, pp. 127-171 ; part. II, pp. 364-382. — Sauveur : *Construction des Quarrés magiques*, Paris, 1710. — D'Ons-en-Bray : *Mémoire de l'Académie des Sciences* pour 1750, Paris, 1754, pp. 241-271. – Des Ourmes : *Mémoires de mathématique et de physique* (Académie française), Paris, 1763, vol. IV, pp. 196-241. — Ozanam et Montluca : *Récréations*, part. I chap. xii. — Euler : *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, Saint-Pétersbourg, 1849, vol. II, pp. 593-602. — Violle : *Traité complet des Quarrés magiques*, trois volumes, Paris, 1837-8. Un aperçu historique du sujet est donné dans le chapitre iv de l'ouvrage de Gunther : *Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, 1876. Voir aussi Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig, 1901, chap. xii.

truction des carrés magiques ne remplissant que les seules conditions définies plus haut ; ces règles sont extraites des ouvrages déjà mentionnés où nous avons d'ailleurs puisé les éléments de cette petite étude. On trouvera des généralisations de certaines questions avec tous les développements utiles dans les mémoires rappelés dans la note (1).

Nous débutons par la construction des carrés magiques d'ordre impair et nous terminons en donnant des règles pour la construction des carrés d'ordre pair.

Pour nous guider et pour la facilité de notre exposition nous ferons usage des expressions suivantes : nous appellerons *cases* les petis carrés dans lesquels on inscrit les nombres, la diagonale allant de la case supérieure de gauche à la case inférieure de droite est désignée sous le nom de *diagonale principale* ou de *diagonale de gauche*, et la diagonale allant de la case supérieure de droite à la case inférieure de gauche est dite *la diagonale de droite.*

Carrés magiques d'ordre impair. — Nous allons donner trois méthodes pour construire *les carrés magiques impairs*, mais pour simplifier notre exposition et fixer les idées nous considérerons le cas des carrés du cinquième ordre en faisant remarquer qu'elles s'appliquent également à tout carré d'ordre impair.

(1) En Angleterre le sujet a été étudié par : R. Moon, *Cambridge Mathematical Journal*, 1845, vol. IV, pp. 209-214 : H. Holditch. — *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, 1864, vol. VI, pp. 181-189. — W. H. Thompson : *Ibid.*, 1870, vol. X, pp. 186-202. — J. Horner : *Ibid.*, 1871, vol. XI, pp. 57-65, 123-132, 213-224. — S. M. Drach : *Messenger of Mathematics Cambridge*, 1873, vol. II, pp. 169-174, 187. — A. H. Frost. — *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, 1878, vol. XV, pp. 34-49, 93-123, 366-368, on y trouve les résultats donnés dans plusieurs mémoires antérieurs.

Nous n'avons pas une bibliographie complète de tous les mémoires ou ouvrages sur le sujet publiés récemment sur le continent et plutôt que de faire des omissions fâcheuses nous préférons ne pas en tenter la nomenclature.

Méthode de De la Loubère [1]. — En examinant la figure 56 ci-après, le lecteur se rendra facilement compte de la méthode suivie pour construire le carré magique de vingt-cinq cases.

On place le chiffre 1 dans la case du milieu de la rangée supérieure, puis on écrit les nombres successifs de un à vingt-cinq dans leur ordre naturel en s'élevant diagonalement vers la droite et en ayant soin d'observer les règles suivantes :

1° Lorsqu'on arrive à la première rangée horizontale, le nombre à inscrire est placé dans la dernière rangée horizontale et comme si eette rangée était transportée à la partie supérieure du carré ;

2° Lorsqu'on atteint la dernière colonne de droite, le nombre suivant à inscrire est placé dans la première colonne de gauche, comme si cette colonne suivait immédiatement la dernière à droite ;

3° Enfin lorsqu'on tombe sur une case déjà occupée ou sur la dernière case supérieure de droite on se reporte à la case immédiatement au-dessous de celle qui contient le dernier chiffre inscrit et l'on continue à monter diagonalement vers la droite. L'examen attentif de la figure 56 rendra cette règle très claire et très précise.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Fig. 56

15+2	20+4	0+1	5+3	10+5
20+3	0+5	5+2	10+4	15+1
0+4	5+1	10+3	15+5	20+2
5+5	10+2	15+4	20+1	0+3
10+1	15+3	20+5	0+2	5+4

Fig. 57

Méthode de De La Loubère

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

Fig. 58

Méthode de Bachet

La façon la plus simple d'expliquer pourquoi le carré ainsi formé est magique consiste à écrire les divers nombres dans le système de

[1] De la Loubère. — *Du royaume de Siam* (traduction anglaise), Londres 1693, vol. II, pp. 227-247. — De la Loubère avait été envoyé par Louis XIV, en 1687-8 auprès du roi de Siam. A son retour en France il fit connaître cette méthode qu'il avait eu l'occasion de voir pratiquer.

numération à base 5 (ou à base n, dans le cas d'un carré d'ordre n) avec cette restriction que 5 pourra figurer comme chiffre des unités simples, tandis que o ne pourra pas être écrit au rang des unités simples. — La figure 57 nous donne les résultats ainsi obtenus.

L'examen de cette figure nous montre que, d'après le mode de construction employé, on est certain que dans chaque rangée et dans chaque colonne, l'un des cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5 (dont la somme est 15) entre, comme unités simples, une fois et une seule fois, et que de plus, on y trouve une fois et une seule fois, comme représentant les unités du second ordre, l'un des cinq multiples de la base 0, 5, 10, 15, 20 (dont la somme est égale à 50). Il résulte donc de là qu'en ne considérant que les rangées horizontales et les colonnes verticales, le carré est magique. D'ailleurs, si le carré est d'ordre impair, chaque diagonale contient une fois et une seule fois l'un des cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ; la diagonale principale contient aussi une fois et une seule fois 0, 5, 10, 15 ou 20 unités du second ordre, et si, comme dans le cas actuel, le nombre 10 est le multiple de la base à ajouter aux chiffres des unités dans la diagonale de droite, le nombre total des unités du second ordre dans cette diagonale est encore 50. Par conséquent, les deux diagonales possèdent les mêmes propriétés que les rangées et les colonnes.

D'une façon générale, quand un carré magique d'ordre impair n est construit d'après la méthode de De la Loubère, chaque rangée et chaque colonne contiennent une fois, mais une fois seulement, chacun des chiffres des unités $1, 2, 3, \ldots, n$, ainsi qu'une fois et qu'une fois seulement chacun des chiffres représentant les unités du second ordre $o, n, 2n, \ldots, n(n-1)$.

Dès lors, le carré est magique en ne considérant que les rangées et les colonnes.

De plus, les diagonales contiennent un seul seulement des chiffres des unités ou n chiffres des unités égaux chacun à $\frac{1}{2}(n+1)$; elles contiennent également un seul seulement des chiffres des unités du second ordre ou n de ces chiffres égaux chacun à $\frac{1}{2}n(n-1)$. Par

suite, les diagonales possèdent la propriété fondamentale des carrés magiques et le carré construit est magique.

Il faut remarquer qu'en plaçant le chiffre 1 dans une autre case quelconque, et en construisant le carré d'après la règle de De la Loubère, on obtient toujours un carré magique par les rangées et les colonnes, mais qui, d'une façon générale, n'est pas magique par les diagonales.

Il est d'ailleurs évident qu'on peut déduire d'autres carrés magiques de celui de la Loubère en permutant les nombres d'une façon convenable. Par exemple, dans la figure 5 plus haut, nous pouvons faire permuter les symboles 1, 2, 3, 4, 5 de $1.2.3.4.5 = 120$ manières différentes et les symboles 0, 5, 15, 20 de $1.2.3.4 = 24$ manières. Une quelconque des cent-vingt premières permutations combinée avec l'une des vingt-quatre dernières donnera un carré magique. Nous pouvons former ainsi 2880 carrés magiques du cinquième ordre, mais 720 seulement d'entre eux sont réellement distincts.

On peut cependant en déduire d'autre carrés magiques, car il y a lieu de faire observer qu'avec un carré magique quelconque, d'ordre impair ou pair, on peut former un autre carré magique en interchangeant simplement la rangée et la colonne qui se coupent sur une certaine case d'une diagonale avec la rangée et la colonne qui se coupent sur la case complémentaire de la même diagonale.

Méthode de Bachet (1). — Cette seconde méthode pour construire les carrés d'ordre impair est à peu près semblable à celle de De la Loubère.

On commence par placer l'unité dans la case immédiatement audessus de la case centrale (c'est-à-dire, en considérant le cas d'un carré du cinquième ordre, dans la case où est le chiffre 7 dans la figure 56 donnée plus haut), puis on écrit les nombres dans leur

(1) Bachet. — Problème XXI, p. 161.

ordre naturel en suivant une ligne se dirigeant diagonalement en montant vers la droite et en s'imposant les conditions suivantes ;

1° Lorsque les cas 1° et 2° mentionnés dans la méthode de De la Loubère se présentent, les règles à suivre sont les mêmes ;

2° Lorsque le troisième cas se présente, on interrompt la marche et on la reprend en s'élevant verticalement de deux rangs, c'est-à-dire que le nombre à écrire est placé dans la case située verticalement au deuxième rang au-dessus de celle contenant le dernier nombre inscrit. Si cette case tombe au-dessus de la première rangée horizontale, on se reporte à la case correspondante dans l'une des deux dernières rangées en appliquant la règle 1 de De la Loubère d'une façon analogue à ce qui a été expliqué précédemment. La figure 58 ci-dessus, page 159, représente un carré magique ainsi construit.

Par cette méthode on obtient encore 720 carrés magiques du cinquième ordre.

Méthode de la Hire (1). — Pour former, au moyen de cette nouvelle méthode, un carré magique d'ordre impair, d'ordre n par exemple, on commence par construire deux carrés auxiliaires, l'un comprenant les chiffres des unités 1, 2, 3,..., n et l'autre, les multiples de la base du système, c'est-à-dire 0, n, $2n$, $3n$,....., $(n-1)n$. Le carré magique cherché s'obtient alors en écrivant, dans chaque case, la somme des nombres inscrits dans les cases correspondantes des carrés auxiliaires.

De la Hire a donné plusieurs manières de construire les carrés auxiliaires. Nous avons choisi la méthode suivante (propositions X et XIV de son mémoire) comme nous paraissant la plus simple et nous l'appliquons à la formation du carré magique du cinquième ordre. Elle conduit, d'ailleurs, aux mêmes résultats que la seconde règle donnée par Moschopoulos.

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1705, part. I, pp. 127-171.

Le premier des carrés auxiliaires (*fig.* 59, ci-après) se construit ainsi :

On commence par inscrire le chiffre 3 dans la case supérieure de gauche, puis, dans un ordre quelconque, les chiffres 1, 2, 4, 5, dans les quatre autres cases de la première rangée horizontale. Partant alors d'une des cases de cette ligne, on descend diagonalement vers la droite en inscrivant dans chaque case rencontrée le nombre qui se trouve dans la case d'où on est parti et en appliquant, au besoin, la règle 2° de De la Loubère (voir la figure 59). L'ensemble des cases occupées par un même chiffre forme ce qu'on appelle une *diagonale brisée*. Il résulte de ce qui précède que dans chaque rangée et dans chaque colonne, les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 se trouvent une fois et une seule fois ; par conséquent, la somme des nombres contenus dans chaque rangée et dans chaque colonne est égale à 15. D'ailleurs, puisque le chiffre 3 (qui est le chiffre moyen de la suite) a été placé dans la case supérieure de gauche, la somme des chiffres inscrits dans la diagonale principale est encore égale à 3 × 5 ou à 15. Enfin, ceci est encore vrai pour la diagonale de droite qui ne contient qu'une fois chacun des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.

Le second carré auxiliaire (*fig.* 60) est construit de la même manière avec les nombres 0, 5, 10, 15 et 20, en plaçant le terme moyen, 10, dans la case supérieure de droite ; les diagonales brisées

3	4	1	5	2
2	3	4	1	5
5	2	3	4	1
1	5	2	3	4
4	1	5	2	3

Fig. 59
1er carré auxiliaire

15	0	20	5	10
0	20	5	10	15
20	5	10	15	0
5	10	15	0	20
10	15	0	20	5

Fig. 60
2e carré auxiliaire

18	4	21	10	12
2	23	9	11	20
25	7	13	19	1
6	15	17	3	24
14	16	5	22	8

Fig. 61
carré magique résultant

constituées par le même nombre vont alors en descendant vers la gauche. Il résulte de cette construction que dans chaque rangée et dans chaque colonne, chacun des nombres 0, 5, 10, 15 et 20 ne

figure qu'une seule fois et que, par conséquent, la somme de tous les nombres dans chaque ligne horizontale ou verticale est égale à 50. On se rend facilement compte qu'il en est de même pour les deux diagonales.

Ajoutons maintenant les nombres inscrits dans les cases correspondantes de chaque carré, nous obtenons 25 nombres tels que la somme de tous ceux donnés par les rangées, par les colonnes et par les diagonales est constante et égale à 50 + 15 ou 65; ces nombres forment le carré représenté par la figure 61.

D'ailleurs, deux cases quelconques dans cette figure ne peuvent contenir le même nombre. Par exemple, les nombres de 21 à 25 ne peuvent figurer que dans les cases correspondant aux cinq qui, dans la figure 60, sont occupées par le nombre 20; mais les cases correspondantes, dans le premier carré auxiliaire, contiennent respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4 ou 5, et, par suite, dans la figure 8 chacun des nombres de 21 à 25 figure bien une fois, mais une seule fois.

En permutant les nombres 1, 2, 4, 5 dans la figure 59 nous obtenons 1. 2. 3. 4 = 24 permutations, dont chacun nous donne, avec le second carré auxiliaire, un nouveau carré magique. De même, en permutant les nombres 0, 5, 15 et 20 dans le second carré auxiliaire, nous obtenons 24 autres carrés dont chacun peut être pris avec chacun des 24 permutations déduites du premier carré auxiliaire. Nous pouvons donc former ainsi 576 carrés magiques du cinquième ordre.

On connaît une autre méthode pour construire les carrés magiques d'ordre impair, elle est due à Poignard et on en trouve des exemples dans le mémoire de De la Hire déjà cité. Nous ne la décrirons pas, quoiqu'elle soit plus simple, tout au moins pour certaines valeurs de n, que celles que nous avons données plus haut, parce qu'elle dépend de la forme de n, et, en particulier, du nombre de ses facteurs premiers. Dans le cas d'un carré magique du cinquième ordre, elle fournit un bien plus grand nombre de carrés que les méthodes de De la Loubère, de Bachet et de De la Hire. On

a également démontré que les carrés magiques, dont l'ordre est un nombre premier, peuvent être construits par une méthode semblable à celle de De la Loubère, avec cette modification que le chiffre 1 est placé dans la case occupant l'angle inférieur de gauche, et que les nombres suivants sont écrits, d'après leur ordre naturel, dans les cases déterminées par la marche d'un cavalier sur le damier et non par celle d'un fou.

La figure 67 de la page 176, représente un carré de cette nature du cinquième ordre. Il y a 2880 carrés magiques du cinquième ordre de cette espèce. De la Hire a montré qu'on pouvait construire, en employant ses méthodes et au moyen de quelques inversions, 57.600 carrés magiques du cinquième ordre, et en tenant compte des résultats fournis par les autres méthodes, il en résulterait que le nombre total des carrés magiques du cinquième ordre est considérable et surpasse peut être 500.000.

Carrés magiques d'ordre pair. — Les règles précédentes ne s'appliquant pas aux carrés magiques d'un ordre exprimé par un chiffre pair, nous allons exposer deux méthodes pour construire les carrés magiques de cette espèce d'un ordre supérieur à deux.

Pour faciliter notre exposition nous donnerons au préalable quelques définitions : On appelle *lignes complémentaires* deux lignes équidistantes des rangées supérieure et inférieure du carré, et *colonnes complémentaires* deux colonnes également équidistantes des colonnes extrêmes de droite et de gauche du carré. Deux cases de la même ligne, mais dans des colonnes complémentaires sont dites *associées horizontalement ;* deux cases de la même colonne mais dans les lignes complémentaires sont dites *associées verticalement,* et enfin deux cases à la fois dans deux lignes et deux colonnes complémentaires sont *associées transversalement.* Ainsi, la case *b* étant associée horizontalement avec la case *a*, et la case *d* associée verticalement avec *a*, les deux cases *b* et *d* sont associées transversalement ; dans ce cas, la case *c* associée verticalement avec *b*, sera associée horizontalement avec *d*, et les deux cases *a* et *c*, seront également associées transver-

salement : les quatre cases a, b, c, d, constituent un *groupe de cases associées* et, si le carré est divisé en quatre parties égales, chaque partie contiendra une case d'un groupe associé quelconque.

Faire une *inversion horizontale* consiste à permuter les nombres inscrits dans deux cases associées horizontalement, et faire une *inversion verticale* revient à permuter les nombres inscrits dans deux cases associées verticalement. Une *inversion transversale* est le résultat de la permutation de deux nombres inscrits dans deux cases associées transversalement. *Inverser en croix* c'est permuter des nombres inscrits dans une case quelconque et dans la case associée horizontalement avec les deux nombres inscrits dans les deux cases associées transversalement aux premières ; une pareille opération est équivalente à deux inversions verticales et à deux inversions horizontales.

Première méthode ([1]). — Cette méthode est la plus simple de toutes celles que nous avons vu pratiquer et a été publiée, pensons-nous, (tout au moins en ce qui concerne les carrés simplement pairs), pour la première fois en 1893.

On commence par inscrire dans les cases du carré les nombres, 1, 2, 3,..., n^2 dans leur ordre naturel, en commençant, par exemple, par la case formant l'angle supérieur de gauche et en suivant chaque ligne l'une après l'autre, de gauche à droite. Nous allons d'abord montrer qu'en effectuant un certain nombre d'inversions horizontales et verticales, nous transformons le carré en un carré magique, puis nous en déduirons une règle permettant d'assigner à l'avance les cases dont les nombres doivent être inversés.

Faisons remarquer en premier lieu que la somme des nombres dans chaque diagonale est égale à $N = \frac{1}{2} n (n^2 + 1)$; par suite, ces diagonales sont déjà magiques et demeurent telles à moins que les nombres qui s'y trouvent ne soient altérés.

([1]) Voir un article dans le *Messenger of Mathematics*, Cambridge, septembre 1893, vol. XXIII, pp. 65-69.

Considérons maintenant les lignes du carré. La somme des nombres inscrits dans la xme ligne à partir de la ligne supérieure est égale à $N - \frac{1}{2} n^2 (n - 2x + 1)$.

La somme des nombres compris dans la ligne complémentaire, c'est-à-dire dans la xme ligne à partir de la ligne inférieure, est égale à

$$N + \frac{1}{2} n^2 (n - 2x + 1)$$

Le nombre inscrit dans une case quelconque de la xme ligne est plus petit que le nombre inscrit dans la case associée verticalement et la différence est égale à $n (n - 2x + 1)$. Par suite, si nous faisons entre ces deux lignes $\frac{1}{2} n$ inversions de nombres inscrits dans des cases associées verticalement, nous augmentons la somme des nombres de la xme ligne de la quantité $\frac{1}{2} n \times n (n - 2x + 1)$, et nous diminuons de la même quantité la somme des nombres compris dans la ligne complémentaire ; ces deux lignes sont donc rendues magiques. Il résulte de là que si, dans chaque groupe d'une ligne et de sa complémentaire nous faisons $\frac{n}{2}$ inversions de nombres inscrits dans des cases associées verticalement, nous formons un carré magique quant aux lignes ; mais pour que les diagonales restent magiques, nous devons, ou ne pas toucher au nombres qui se trouvent inscrits dans les cases communes à chaque ligne et aux deux diagonales, ou échanger ces nombres avec ceux des cases associées verticalement avec les premières.

Nous sommes actuellement en possession d'un carré magique suivant ses lignes et ses diagonales, et il s'agit de le rendre magique suivant ses colonnes. Considérons de nouveau le premier arrangement des nombres suivant leur ordre naturel, il nous aurait été possible de rendre le carré magique suivant ses colonnes en appliquant la méthode qui vient d'être expliquée pour les lignes.

La somme des nombres contenus à l'origine dans la y^{me} colonne à partir de la gauche est égale à $N - \frac{1}{2}n(n - 2y + 1)$ et la somme des nombres inscrits dans la colonne complémentaire, c'est-à-dire dans la y^{me} colonne à partir de la droite, est $N + \frac{1}{2}n(n - 2y + 1)$; mais tout nombre de la y^{me} colonne est plus petit que le nombre avec lequel il est associé horizontalement dans la colonne complémentaire et la différence est $n - 2y + 1$, de sorte que si l'on fait entre ces deux colonnes $\frac{n}{2}$ inversions de nombres situés dans des cases associées horizontalement, la somme des nombres dans ces deux colonnes est rendue égale à N, c'est-à-dire que ces deux colonnes deviennent magiques.

En opérant ainsi sur chaque groupe d'une colonne et de sa complémentaire, on rend le carré magique quant aux colonnes; mais comme plus haut, pour que les diagonales demeurent magiques, nous devons, soit maintenir dans chacune d'elles les nombres inscrits dans les cases communes à chaque colonne et aux deux diagonales, soit échanger ces nombres avec ceux des cases associées horizontalement avec les premières.

Il reste maintenant à montrer que les permutations horizontales et verticales que nous avons considérées dans les deux paragraphes précédents peuvent se faire indépendamment l'une de l'autre, c'est-à-dire que les permutations entre les nombres des colonnes complémentaires peuvent être effectuées de façon à n'avoir aucune influence sur les nombres déjà échangés dans les lignes complémentaires. Pour cela, il faut qu'il y ait exactement dans chaque colonne, $\frac{n}{2}$ permutations des nombres situés dans des cases associées verticalement, et, dans chaque ligne $\frac{n}{2}$ permutations des nombres inscrits dans les cases associées horizontalement. Montrons que l'on peut toujours affirmer qu'il en est ainsi lorsque n est plus grand que 2. Nous supposons encore que les nombres de 1 à n^2 sont ins-

crits dans les cases suivant leur ordre naturel et nous partons de cette disposition initiale.

Un *carré doublement pair* est celui dans lequel n est de la forme $4m$. En divisant un tel carré en quatre carrés égaux, chacun d'eux contient $2m$ colonnes et $2m$ lignes. Considérons le premier de ces carrés et, dans chacune des $2m$ colonnes, prenons m cases disposées de telle sorte qu'elles soient, en même temps, m cases dans chaque ligne, puis permutons les nombres inscrits dans ces $2m^2$ cases avec ceux inscrits dans les $6m^2$ carrés associés en croix avec les premiers. Le résultat est équivalent à celui que l'on obtient en permutant $2m$ nombres dans chaque ligne et dans chaque colonne, et, par suite, le carré est rendu magique.

Pour choisir les $2m^2$ cases dans le premier carré, on peut opérer ainsi : divisons le carré entier que nous supposons représenté ci-dessous en 16 carrés élémentaires dont chacun contient m^2 cases ; nous pouvons alors choisir les cases soit dans les carrés a, soit dans les carrés b. En permutant chacun des nombres contenus dans les huit carrés a avec les nombres qui leur sont associés diagonalement, on obtient, comme résultat final, un carré magique. La figure 78 de la page 187 représente un carré magique du 8e ordre construit de cette manière.

Une autre manière de déterminer les $2m^2$ cases dans le premier quart du grand carré total, consiste à prendre les m premières cases dans la première colonne, les cases 2 à $m+1$ dans la seconde colonne, et ainsi de suite, les cases $m+1$ à $2m$ dans la $(m+1)^{me}$ colonne, les cases $m+2$ à $2m$ et la première case dans la $(m+2)^{me}$ colonne, et ainsi de suite ; finalement la $2m^{me}$ case et les cases 1 à $m-1$ dans la $2m^{me}$ colonne.

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Fig. 62

Un carré est simplement pair, lorsque n est de la forme $2(2m+1)$. Si un tel carré est divisé en quatre carrés égaux, chacun d'eux contient $2m+1$ colonnes et $2m+1$ lignes ou rangées. Considérons le premier de ces carrés partiels et dans chacune de ses colonnes

prenons m cases disposées de telle sorte qu'elles donnent, en même temps, m cases dans chaque ligne ; on prend, par exemple, les m premières cases de la première colonne, les cases 2 à $m+1$ de la seconde colonne, et ainsi de suite..., les cases $m+2$ à $2m+1$ de la $(m+2)^{me}$ colonne, les cases $m+3$ à $2m+1$ et la première case de la $(m+3)^{me}$ colonne, et ainsi de suite ; finalement, la $(2m+1)^{me}$ case, et les cases 1 à $m-1$ de la $(2m+1)^{me}$ colonne. Cela fait, on permute en croix les nombres inscrits dans ces $m(2m+1)$ cases avec ceux inscrits dans les $3m\,(2m+1)$ cases associées. Le résultat est le même que si on avait fait $2m$ permutations dans chaque ligne et dans chaque colonne. Pour rendre le carré magique nous devons avoir $\frac{1}{2}n$ ou, ce qui revient au même $2m+1$ permutations de cette sorte dans chaque ligne et dans chaque colonne, c'est-à-dire qu'il nous faut une permutation de plus dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Ceci ne présente aucune difficulté. Par exemple, avec la disposition indiquée plus haut, les nombres inscrits dans la $(2m+1)^{me}$ case de la première colonne, dans la première case de la seconde colonne, dans la seconde case de la troisième colonne, et ainsi de suite, jusqu'à la $2m^{me}$ case de la $(2m+1)^{me}$ colonne peuvent être permutés avec les nombres qui figurent dans les cases associées verticalement, et cette opération a pour effet de rendre toutes les lignes magiques. Ensuite, les nombres inscrits dans la $2m^{me}$ case de la première colonne, dans la $(2m+1)^{me}$ case de la seconde colonne, dans la première case de la troisième colonne, dans la deuxième case de la quatrième colonne, et ainsi de suite, jusqu'à la $(2m-1)^{me}$ case de la $(2m+1)^{me}$ colonne étant permutés avec ceux qui figurent dans les cases associées horizontalement, cette seconde opération a pour effet de rendre les colonnes magiques sans enlever cette même propriété aux lignes.

On remarquera que, dans ce qui précède, nous supposons implicitement m différent de zéro, c'est-à-dire $n > 2$. On voit sans peine que pour $m = 1$, et, par suite $n = 6$, les nombres inscrits dans

les cases des diagonales doivent être compris parmi ceux à permuter en croix ; si n est plus grand que 6, cela n'est pas nécessaire bien que pouvant être avantageux.

La construction d'un carré magique impair et celle d'un carré magique doublement pair ne présentent aucune difficulté ; mais en ce qui concerne les carrés magiques simplement pairs, bien que la construction donnée ci-dessus soit facile, elle n'en est pas moins d'une application pénible et fatigante. Il est fâcheux qu'on n'ait pas encore trouvé une règle plus claire — par exemple du genre de celle donnée pour former les bordures d'un carré magique doublement pair — qui permettrait d'écrire immédiatement et sans tâtonnements un carré magique simplement pair quelconque.

Méthode de De la Hire [1]. — La méthode suivante pour construire un carré magique quelconque d'ordre pair supérieur à 2, est due à De la Hire.

On débute comme pour les carrés magiques d'ordre impair par construire deux carrés auxiliaires ; l'un avec les chiffres des unités 1, 2, 3,.. n, et l'autre avec les multiples de la base donnant les unités du second ordre $0, n, 2n, \ldots, (n-1)n$. On forme ensuite le carré magique demandé en additionnant les nombres inscrits dans les cases correspondantes des carrés auxiliaires. Par analogie avec la notation employée plus haut, nous appellerons *nombres complémentaires* deux nombres équidistants des extrémités dans la série 1, 2, 3,..., n aussi bien que dans la série $0, n, 2n, 3n, \ldots (n-1)n$.

Pour simplifier notre exposition nous examinerons le cas d'un carré magique du sixième ordre bien que la méthode soit générale et s'applique à un carré magique d'ordre pair quelconque, l'ordre étant supérieur à deux.

[1] La règle est due à De la Hire (deuxième partie de son mémoire) et est donnée par Montucla dans son édition de l'ouvrage d'Ozanam. Nous avons fait usage de la modification introduite par Labosne dans son édition des *Problèmes* de Bachet, parce que nous évitons ainsi d'introduire un troisième carré auxiliaire. Nous ne savons pas à qui cette modification est due.

Le premier carré auxiliaire (*fig.* 63) se construit comme il suit :

1° Dans les cases de la diagonale principale on écrit les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 en les disposant de manière que les nombres complémentaires soient dans des cases complémentaires (par exemple, dans l'ordre 2, 6, 3, 4, 1, 5 ou dans l'ordre naturel 1, 2, 3, 4, 5, 6).

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

Fig. 63
1er carré auxiliaire

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Fig. 64
2e carré auxiliaire

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Fig. 65
carré magique résultant

2° Chacun de ces nombres est reproduit dans la case associée verticalement.

3° Dans chacune des cases libres de la première colonne verticale on inscrit soit le même nombre qui se trouve déjà écrit dans deux cases de cette colonne, soit le nombre complémentaire (par exemple, dans le cas de la figure 63, on écrit 1 ou 6) sans s'imposer d'ordre, mais de façon que chacun d'eux soit pris le même nombre de fois et que la condition mentionnée plus bas (voir le 3e de la page 173) soit satisfaite.

4° Les nombres complémentaires de ceux de la première colonne sont reproduits dans les cases associées horizontalement avec celles de la première colonne.

5° Les cases libres des deuxième et troisième colonnes sont remplies d'après la même règle que celle de la première colonne et dans les cases associées horizontalement à celles de ces deux colonnes on inscrit les nombres complémentaires.

Le carré ainsi formé est nécessairement magique suivant ses lignes, ses colonnes et ses diagonales.

Le second des carrés auxiliaires (*fig.* 64) se construit d'après cette règle :

1° Dans les cases de la diagonale de gauche on inscrit les nombres 0, 6, 12, 18, 24 et 30 en les disposant de manière que deux cases complémentaires contiennent des nombres complémentaires.

2° Les cases associées horizontalement avec celles de la diagonale sont occupées par les mêmes nombres que ceux qui figurent dans la diagonale.

3° Les cases libres de la première ligne sont remplies soit avec le nombre déjà écrit deux fois dans cette ligne, soit avec son complémentaire (par exemple, dans la figure 10 avec 0 ou 30). L'ordre d'inscription est quelconque mais on s'impose deux conditions : 1° la ligne doit contenir trois fois chaque nombre ; 2° si une case de la première ligne du premier carré auxiliaire (*fig.* 63) et la case associée verticalement contiennent des nombres complémentaires, la case correspondante de la première ligne du second carré auxiliaire et la case associée horizontalement doivent contenir le même nombre (1).

4° Dans les cases associées verticalement avec celles de la première ligne on inscrit les nombres complémentaires de ceux qui figurent dans la première ligne.

5° Les cases libres dans la seconde et la troisième ligne sont remplies de la même manière que celles de la première ligne et dans les cases associées verticalement avec elles on inscrit les nombres complémentaires.

Le second carré construit est, comme le premier, magique suivant les lignes, les colonnes et les diagonales.

Il reste à montrer que la condition mentionnée dans le paragraphe 3° peut toujours être satisfaite.

Dans le cas d'un carré doublement pair, c'est-à-dire lorsque n est

(1) L'introduction de cette condition nous évite la nécessité de construire (ainsi que l'a fait Montucla) un troisième carré auxiliaire.

divisible par 4, nous n'avons nullement besoin d'inscrire des nombres complémentaires dans les cases associées verticalement du premier carré auxiliaire, à moins que cela nous convienne, et si nous en insérons, leur présence n'empêche pas de remplir la condition additionnelle.

Dans le cas d'un carré simplement pair, c'est-à-dire lorsque n est divisible par 2, mais non par 4, il est impossible de satisfaire à la condition imposée, si une ligne horizontale quelconque du premier carré auxiliaire a toutes ses cases associées verticalement (à l'exception des deux carrés de la diagonale) occupées par des nombres complémentaires. Par conséquent, il est nécessaire en construisant le premier carré auxiliaire et en appliquant la règle (3°) de s'arranger de façon que, dans chaque ligne, une case au moins, non commune avec la diagonale, ait sa case associée verticalement occupée par le même nombre qu'elle-même.

Il est toujours possible de remplir cette condition si n est plus grand que deux.

Le carré magique cherché s'obtient maintenant en inscrivant dans chaque case la somme des nombres inscrits dans les cases correspondantes des carrés auxiliaires représentés par les figures 63 et 64. Le carré ainsi construit est représenté (*fig.* 65) et est évidemment magique. Chacun des nombres de 1 à 36 y figure une fois et une fois seulement, car les nombres de 1 à 6 et de 31 à 36 ne peuvent entrer que dans la première et la dernière ligne, et, d'après les règles données pour la construction, le même nombre ne peut figurer deux fois. De même, les nombres de 7 à 12 et de 25 à 30 occupent les cases de deux autres lignes, et aucun de ces nombres ne peut figurer deux fois ; et ainsi de suite. On peut former le carré représenté par la figure 54 de la page 155 en suivant les mêmes règles et le lecteur les appliquera sans difficulté à un carré magique d'un ordre pair quelconque.

Autres méthodes pour construire des carrés magiques. — Les méthodes que nous venons d'exposer nous paraissent les plus

simples de toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici ; mais on connaît encore deux *autres méthodes* moins générales, dont nous allons donner un simple aperçu en passant.

Ces deux méthodes reposent sur ce principe qu'un carré magique reste magique lorsque le produit de chacun des nombres qui y figure, par une quantité constante, est augmenté d'un même nombre constant.

La *première méthode* s'applique seulement à des carrés pouvant être subdivisés en carrés magiques plus petits d'un ordre quelconque supérieur à deux. Elle dépend de ce fait que si l'on sait construire des carrés magiques des m^{me} et n^{me} ordres, on pourra construire un carré magique du $(m \times n)^{me}$ ordre. Par exemple, un carré de 81 cases peut être considéré comme composé de 9 carrés plus petits contenant chacun 9 cases, et en remplissant les cases de chacun de ces carrés éléments en suivant le même ordre relatif, puis prenant ces carrés eux-mêmes dans le même ordre, on en déduit aisément le carré total.

Ces carrés sont appelés *carrés magiques composés*.

La *seconde méthode* est due à Frénicle, elle consiste à entourer un carré magique avec une *enceinte*. Par exemple, dans la figure 66 de la page 176, le carré intérieur est magique, et il est entouré d'une enceinte de telle sorte que le carré tout entier est également magique. De cette manière, on déduit successivement du carré magique du troisième ordre, les carrés des cinquième, septième, neuvième, etc., ordres, c'est-à-dire un carré magique d'un ordre impair quelconque. Semblablement du carré magique du quatrième ordre on peut déduire successivement un carré magique d'un ordre pair quelconque.

Si nous voulons construire par cette méthode un carré magique contenant les n^2 premiers nombres en partant du carré magique de $(n - 2)^2$, nombres, le procédé le plus simple et le plus usité consiste à réserver pour les $4(n - 1)$ nombres de l'enceinte, les $2(n - 1)$ premiers nombres de la suite naturelle et les $2(n - 1)$ derniers nombres. La somme des nombres inscrits dans chaque

ligne d'un carré magique d'ordre $(n-2)$ est égale à $\frac{1}{2}(n-2)$ $[(n-2)^2+1]$, le terme moyen étant $\frac{1}{2}[n-2)^2+1]$. De même, le terme moyen dans un carré magique d'ordre n est $\frac{1}{2}(n^2+1)$, la différence entre les deux est égale à $2(n-1)$. En commençant donc par construire un carré magique quelconque d'ordre $(n-2)$ et en ajoutant la quantité $2(n-1)$ à chacun des nombres qui s'y trouvent inscrits, le terme moyen du nouveau carré formé est $\frac{1}{2}(n^2+1)$.

Les nombres réservés pour l'enceinte figurent par couples n^2 et 1, n^2-1 et 2, n^2-2 et 3, etc., de telle sorte que la moyenne de chaque couple soit $\frac{1}{2}(n^2+1)$ et on doit les disposer de façon qu'ils occupent des cases opposées dans l'enceinte. En opérant ainsi, le carré complet est nécessairement magique si la somme des nombres dans deux côtés adjacents de la bordure extérieure n'est pas erronée. On trouve parfois plus de facilité à disposer les nombres dans l'enceinte en représentant par p le nombre n^2+1-p (qui doit occuper la case opposée à celle où est p) mais nous jugeons inutile d'entrer dans de plus longs détails à ce sujet.

1	2	19	20	23
18	16	9	14	8
21	11	13	15	5
22	12	17	10	4
3	24	7	6	25

Fig. 66
Carré magique avec enceinte

7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12
1	14	22	10	18

Fig. 67
Carré diabolique

Pour compléter ces notions générales, montrons comment on a formé le carré magique de la figure 66 ci-dessus. On a construit

tout d'abord, par la méthode de De la Loubère, un carré magique du troisième ordre et en ajoutant huit à chacun des nombres qui y figurent, on a formé le carré intérieur de la figure 66. Les nombres non employés sont 25 et 1, 24 et 2, 23 et 3, 22 et 4, 21 et 5, 20 et 6, 19 et 7, 18 et 8. La somme de chaque couple est 26, et il est évident que ces nombres doivent être disposés par couple dans les cases extrêmes de chaque ligne.

Avec un peu de patience, un carré magique d'ordre quelconque peut être construit en appliquant cette méthode et il conserve sa propriété d'être magique lorsqu'on enlève successivement chaque enceinte. Violle dans son ouvrage donne quelques exemples de carrés magiques ainsi formés. Cette dernière méthode est celle généralement adoptée par les mathématiciens qui se sont créés eux-mêmes ou par les savants de rencontre, et dont plusieurs paraissent croire que la construction empirique des carrés magiques doit être regardée comme une découverte scientifique.

Polygones magiques. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des nombres disposés sous la forme de carrés et remplissant certaines conditions, mais la même récréation peut se faire en répartissant les nombres de manière à former d'autres figures géométriques, par exemple ; des rectangles, des triangles, des pentagones, etc.

Sans entrer dans des détails au sujet de la construction de ces sortes de figures, nous nous bornerons à en donner quelques exemples empruntés à l'étude du professeur Scheffler.

1	10	11	29	28	19	18	16
9	2	30	12	20	27	7	25
24	31	3	21	13	6	26	8
32	23	22	4	5	14	15	17

Fig. 68

(1). Les nombres de 1 à 32 peuvent être disposés sous forme de rectangle comptant 8 cases dans le sens de la longueur et 4 cases dans le sens de la largeur, de telle sorte que la somme des nombres inscrits dans cha-

que ligne horizontale soit égale à 132 et que celle des nombres dans chaque colonne verticale soit égale à 66.

(2). Les nombres de 1 à 27 peuvent également être disposés aux sommets et sur les côtés de trois triangles équilatéraux ayant un centre commun, de telle sorte que les côtés du triangle extérieur contiennent chacun six nombres dont la somme est égale à 96, et que les côtés du triangle médian en contiennent chacun 4 donnant la somme constante 61.

La figure ci-après reproduit cette disposition.

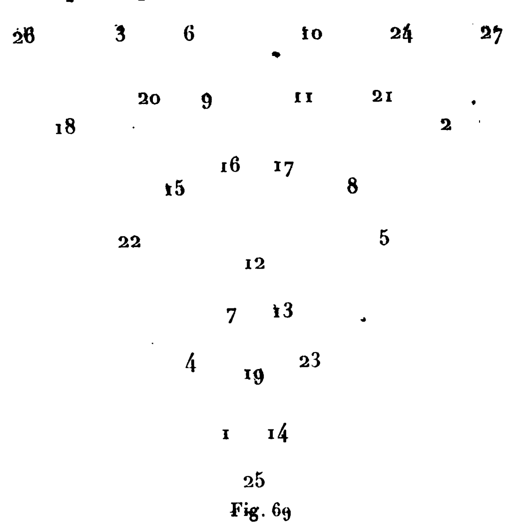


Fig. 69

(3). Les nombres de 1 à 80 peuvent être disposés autour d'un point central aux sommets et sur les côtés de 4 pentagones de telle sorte que : 1° chaque côté du pentagone central contienne 2 nombres ; — 2° chaque côté du pentagone à la suite contienne 4 nombres donnant la somme constante 122 : — 3° chaque côté du 3° pentagone contienne 6 nombres dont la somme est égale à 248 ; et enfin, 4° chaque côté du 4° pentagone (le polygone extérieur) contienne 8 nombres dont la somme est égale à 254.

De plus la somme des 4 nombres en ligne droite, inscrits aux sommets des pentagones est également constante et égale à 92.

(4). Les nombres de 1 à 73 peuvent être disposés comme le re-

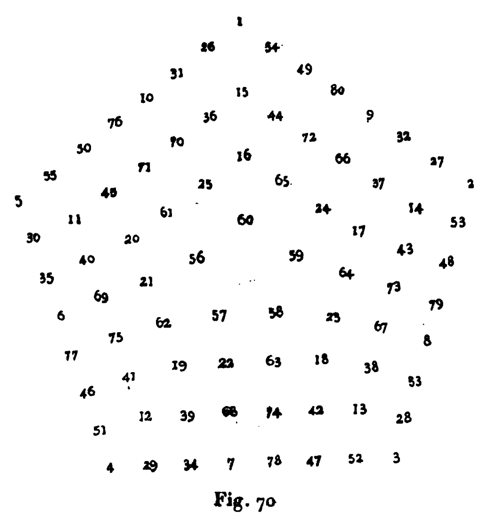


Fig. 70

présente la figure 70 autour du nombre 37 pris comme point central aux sommets et sur les côtés de trois hexagones de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

Les côtés de ces hexagones contiennent respectivement chacun 3, 5 et 7 nombres.

Chaque hexagone fournit la même somme non seulement quand on additionne les nombres inscrits sur chacun des six côtés, mais encore quand on ajoute les nombres inscrits aux sommets suivant les six diamètres, ou les nombres en ligne droite inscrits aux milieux de chaque côté.

Cette somme constante est égale à 111 pour le premier hexagone, à 185 pour le second et à 285 pour le troisième, pour les six diagonales et les pieds des six apothèmes.

1 5 6 70 60 59 58

63 8

62 19 53 46 22 45 9

61 20 24 64

2 48 31 42 38 49 57

3 47 39 40 44 56

67 51 41 37 33 23 7

66 50 34 35 54 11

65 25 36 32 43 26 12

10 30 27 13

17 29 21 28 52 35 72

18 71

16 69 68 4 14 15 73

Fig. 71

Cubes magiques. — Divers amateurs et, en particulier, Kochansky (1686), Sauveur (1710), Hugel (1859) et Scheffler (1882) ont étendu l'idée des figures magiques à deux dimensions, à l'espace à trois dimensions.

Imaginons un cube divisé en n^3 petits cubes élémentaires par trois séries de $(n - 1)$ plans équidistants et parallèles respectivement aux trois faces d'un même trièdre.

Le problème consiste à inscrire la suite naturelle des nombres de 1 à n^3 dans les cases cubiques ainsi formées de telle sorte que la somme des n nombres inscrits dans chaque rangée horizontale de droite à gauche ou d'avant en arrière, dans chaque rangée verticale, dans chaque diagonale des tranches carrées élémentaires horizontales et verticales et enfin suivant chacune des quatre diagonales du cube considéré, soit constante.

Un pareil arrangement n'est pas possible avec un cube décomposé en $3 \times 3 \times 3 = 27$ cases élémentaires.

Avec un cube de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cases élémentaires on peut former une figure telle que chaque rangée parallèle à l'une des arêtes du cube, ou suivant les diagonales, donne 130 pour la somme des quatre nombres qui s'y trouvent inscrits.

Si, partant de la tranche supérieure, les nombres inscrits aux centres des seize petits cubes de chacune des quatre tranches horizontales sont supposés projetés sur les bases supérieures des seize cases qui constituent chacune de ces tranches, on a les quatre carrés magiques du quatrième ordre ci-après.

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

Tranche supérieure

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

2e tranche

62	19	35	14
7	42	26	55
11	38	22	59
50	31	47	2

3e tranche

à partir de la base supérieure du cube

4	45	29	52
57	24	40	9
53	28	44	5
16	33	17	64

Tranche inférieure

Fig. 72

La somme constante 130 s'obtient de 52 manières différentes : $16 \times 2 = 32$ fois par les rangées parallèles aux arêtes horizontales ; 16 fois par les rangées parallèles aux arêtes verticales ; et 4 fois par les 4 rangées de 4 cubes constituant les diagonales du cube, à savoir :

1, 43, 22, 64 ; 49, 27, 38, 50 ; 61, 23, 42, 4 ; 13, 39, 26, 52.

Avec un cube décomposé en $5 \times 5 \times 5 = 125$ cases cubiques élémentaires on peut disposer les 125 premiers nombres de façon à obtenir 109 fois la somme constante 315.

75 fois par les rangées parallèles aux trois arêtes ;

10 fois par les cases disposées suivant les $5 \times 2 = 10$ diagonales des 5 tranches horizontales ;

$10 \times 2 = 20$ fois par les 20 diagonales des $5 \times 2 = 10$ tranches verticales ;

et enfin 4 fois par les cases disposées suivant les diagonales du cube.

De même que nous avons montré la possibilité de former des carrés magiques d'ordre impair avec deux carrés magiques auxiliaires, de même les cubes magiques d'ordre impair peuvent être construits au moyen de trois cubes auxiliaires.

C'est de cette manière que le cube magique du cinquième ordre a été formé en inscrivant dans la case centrale le nombre qui occupe le milieu de la suite naturelle de 1 à 125, c'est-à-dire 63.

121	27	83	14	70
10	61	117	48	79
44	100	1	57	113
53	109	40	91	22
87	18	74	105	31

Tranche supérieure

2	58	114	45	96
36	92	23	54	110
75	101	32	88	19
84	15	66	122	28
118	49	80	6	62

2e tranche

33	89	20	71	102
67	123	29	85	11
76	7	63	119	50
115	41	97	3	59
24	55	106	37	93

3e tranche

64	120	46	77	8
98	4	60	111	42
107	38	94	25	51
16	72	103	34	90
30	81	12	68	124

4e tranche

à partir de la base supérieure du cube

95	21	52	108	39
104	35	86	17	73
13	69	125	26	82
47	78	9	65	116
56	112	43	99	5

Tranche inférieure

Fig. 73

Cette disposition nous donne 315 pour la somme des nombres disposés suivant les 30 diagonales des tranches horizontales et verticales.

On a également formé avec des nombres, des cercles magiques, des croix, des losanges, des étoiles magiques et bien d'autres figures ; on connaît aussi des cylindres et des sphères magiques, mais la théorie de ces diverses figures ne présente aucun intérêt, et la place nous manque pour donner les règles de leur construction.

Carrés hyper-magiques. — Dans ces derniers temps, on s'est beaucoup occupé de la formation de carrés magiques remplissant certaines conditions supplémentaires et il en est résulté quelques problèmes présentant de grandes difficultés mathématiques.

Par exemple, si nous divisons un carré de 64 cases au moyen des deux lignes passant par les milieux des côtés en quatre parties égales contenant chacune 16 cases, on peut se proposer comme problème d'inscrire dans les 64 cases les 64 premiers nombres de façon à former un carré magique du huitième ordre constitué par quatre carrés magiques du quatrième ordre.

La figure ci-après donne une solution de la question.

1	4	63	62	5	8	59	58
64	61	2	3	60	57	6	7
42	43	24	21	34	35	32	29
23	22	41	44	31	30	33	36
13	16	51	50	9	12	55	54
52	49	14	15	56	53	10	11
38	39	28	25	46	47	20	17
27	26	37	40	19	18	45	48

Fig. 74

Les quatre nombres inscrits dans chacune des lignes ou des colonnes des quatre petits carrés magiques donnent une somme égale à 130, de telle sorte que la somme constante formée par les nombres du carré magique du huitième ordre est $130 \times 2 = 260$.

Enfin, comme nouvelle généralisation, nous donnons le carré remarquable du neuvième ordre constitué par neuf carrés magiques du troisième ordre contenant chacun neuf nombres consécutifs.

La loi de formation d'un tel carré est simple.

Considérons les neuf petits carrés magiques comme les neuf cases d'un carré magique du troisième ordre dans lesquels seraient inscrits les nombres de I à IX. Puis inscrivons dans les neuf cases du carré I les 9 premiers nombres ; dans les neuf cases du carré II, les nombres de 10 à 18 ; dans les neuf cases du carré III, les 9 nombres de 19 à 27 et ainsi de suite.

IV	IX	II
III	V	VII
VIII	I	VI

Fig. 75

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Fig. 76

Carrés diaboliques. — Une espèce de carrés hyper-magiques est celle qui comprend des carrés construits de telle sorte que la somme des nombres contenus dans certaines lignes (telles que les rangées, les colonnes, les diagonales et les diagonales brisées) soit constante. En France, ces carrés sont appelés *carrés diaboliques* ou carrés *magiquement magiques* [1] ; leur construction a été étudiée par

[1] En Angleterre : *Nasik Squares* ou pan-diagonal magic squares.

De la Hire, Sauveur et Euler ; mais leur théorie est due, en grande partie, à M. A. H. Frost qui l'a exposée dans les mémoires rappelés dans la note de la page 158, et à M. Frolow, qui en a fait l'objet de deux mémoires publiés à Saint-Péterbourg, en 1884, et à Paris, en 1886. On comprend facilement qu'en sectionnant verticalement (ou horizontalement) un carré diabolique, on puisse échanger les parties sans altérer la propriété magique de la figure. En effectuant ainsi une transposition verticale et une transposition horizontale, un nombre quelconque peut être amené dans une case désignée. La figure 55 de la page 155 représente un carré diabolique du quatrième ordre, et la figure 67 de la page 176 en représente un autre du cinquième ordre,

On peut construire des carrés diaboliques de l'ordre $6n \pm 1$ au moyen de règles analogues à celles données par De la Loubère, avec cette restriction cependant qu'il faut adopter le mouvement du cavalier et non celui du fou pour déterminer les cases qui doivent être occupées par des nombres consécutifs et que, pour les carrés d'un ordre supérieur à cinq, il est nécessaire d'établir des règles spéciales pour aller de la case occupée par le nombre $k.n$ à celle occupée par le nombre $kn + 1$.

5	31	35	60	57	34	8	30
19	9	53	46	47	56	18	12
16	22	42	39	52	61	27	1
63	37	25	24	3	14	44	50
26	4	64	49	38	43	13	23
41	51	15	2	21	28	62	40
54	48	20	11	10	17	55	45
36	58	6	29	32	7	33	59

Fig. 77. — **Carré doublement magique.**

Carrés doublement magiques. — Dans une autre espèce de carrés hypermagiques, le problème consiste à construire un carré magique du n^{me} ordre tel que si on remplace chacun des nombres qui s'y trouve inscrit par sa m^{me} puissance, le nouveau carré ainsi constitué soit encore magique.

La figure 77 ci-dessus nous offre l'exemple d'un carré magique de cette nature (1) : elle représente un carré magique du huitième ordre dans lequel la somme des nombres inscrits dans chaque ligne horizontale, dans chaque colonne et dans les deux diagonales est égale à 260. En remplaçant chaque nombre par son carré, le nouveau carré obtenu est encore magique (la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales est égale à 11.180).

Faisceaux magiques. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des nombres disposés en lignes. Or, en inversant les figures constituées par les points centraux des carrés dans lesquels les nombres sont inscrits, on obtient une série de droites formant des faisceaux, et si ces droites sont numérotées de façon à établir leur correspondance avec les points, les faisceaux seront magiques (2).

Ainsi, dans un carré magique du n^{me} ordre on dispose n^2 nombres consécutifs suivant $2n + 2$ droites contenant chacune n nombres, de telle sorte que la somme de tous les nombres contenus dans chacune de ces lignes est constante. Inversement, on peut disposer n^2 droites numérotées consécutivement, de façon à former $2n + 2$ faisceaux, contenant chacun n rayons, de telle sorte que dans chaque faisceau la somme des nombres désignant les rayons soit constante.

Par exemple, la figure 78 représente un carré magique contenant les 64 premiers nombres disposés suivant 18 lignes (8 rangées, 8 colonnes et 2 diagonales).

Inversement la figure 79 représente 64 lignes disposées de façon à former 18 faisceaux de chacun 8 rayons.

Le mode de construction est bien évident. Le faisceau constitué par les 8 rayons convergeant au point O est coupé par deux droites parallèles perpendiculaires à l'axe du faisceau et les points d'inter-

(1) Voir un article de M. Coccoz dans l'*Illustration* du 29 mai 1897.
(2) Voir *Magic Reciprocals* par G. Frankenstein, Cincinnati 1875.

section sont réunis deux à deux par des droites qui s'entre-croisent. On obtient de la sorte 8 faisceaux ayant pour sommets les points A, B, C,... H ; 8 faisceaux ayant pour sommets les points A′ B′..., H′ ; un faisceau de sommet O et enfin un faisceau dont le sommet est sur l'axe de ce dernier.

Pour établir la correspondance entre la figure 79 et la figure 78 dans laquelle la somme des nombres de chacune des 18 lignes est constante, on numérote les lignes dans le faisceau A de gauche à droite 1, 9,... 57 en suivant l'ordre des nombres inscrits dans la première colonne du carré. Les lignes du faisceau B sont numérotées de la même façon avec les nombres de la deuxième colonne du carré, et ainsi de suite. Pour rendre la figure plus claire, les numéros d'ordre des droites n'ont pas été inscrits, mais il résulte bien du mode de construction et de ce qui précède, que la somme des 8 nombres qui représentent les rayons dans chacun des 18 faisceaux est la même.

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Fig. 78.

On peut encore aller plus loin : si la figure qui vient d'être tracée est coupée par deux autres parallèles perpendiculaires à l'axe, et si tous les points où elles coupent les rayons sont réunis en croix deux à deux, les nouvelles droites ainsi tracées se coupent sur l'axe du faisceau primitif ou sur des perpendiculaires à cet axe. La figure, dans son ensemble, contient 8^3 lignes disposées en 244 faisceaux de chacun 8 rayons et représente la réciproque d'un cube magique du huitième ordre.

En transformant encore par inversion, on obtient la représentation sur un plan d'un cube magique.

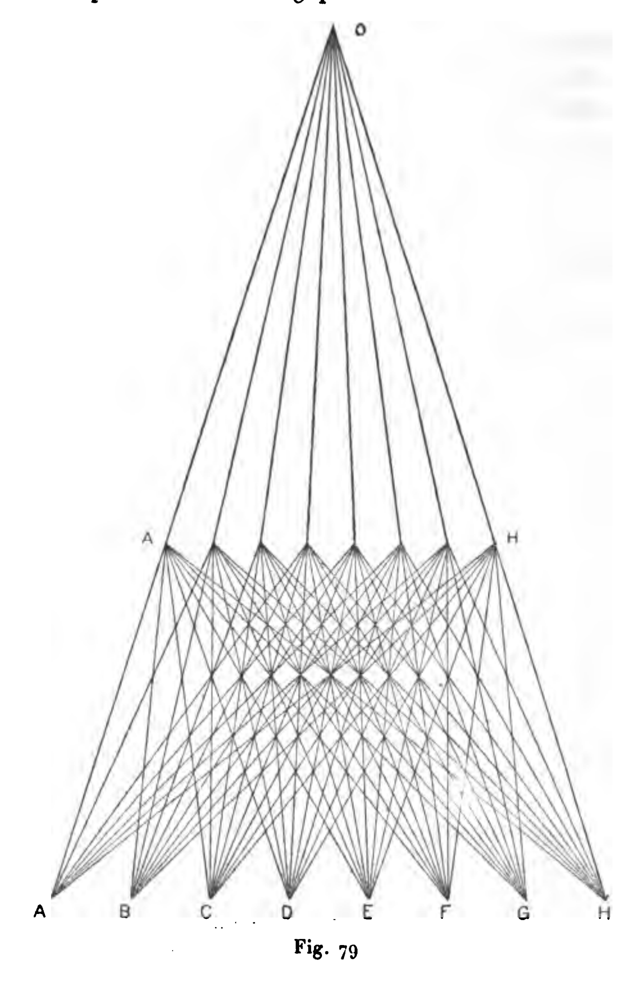


Fig. 79

Divertissements avec des carrés magiques. — On peut

imaginer bien des questions dont on trouve les solutions d'une façon empirique et se rattachant à la théorie des carrés magiques, mais la plupart doivent être envisagées plutôt comme des amusements ingénieux que comme des exercices mathématiques. En voici quelques exemples.

Carrés magiques avec des cartes. — On connaît ce problème qui consiste à disposer sous forme d'un carré les 16 cartes marquantes d'un jeu (as, valet, dame et roi), de telle sorte que chaque rangée, chaque colonne et les deux diagonales ne contiennent pas deux cartes semblables.

La solution est basée sur la méthode de De la Hire pour la construction des carrés magiques d'ordre pair.

Considérons les deux carrés magiques auxiliaires du quatrième ordre

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

et

0	4	8	12
8	12	0	4
12	8	4	0
4	0	12	8

remplaçons respectivement les nombres 1, 2, 3, 4 par les cartes as, roi, reine, valet, et les nombres 0, 4, 8, 12 par les couleurs trèfle, pique, cœur et carreau ; l'addition des deux carrés magiques ci-dessus nous fournit immédiatement la solution de la question.

On retient facilement cette disposition en remarquant qu'en partant de chaque angle, l'emplacement des cartes de couleur et de valeur différentes est donné par les diverses positions que peut prendre le cavalier d'un jeu d'échecs.

Si on se fixe les positions des 4 cartes d'une ligne quelconque, il n'y a que deux manières de placer les autres cartes de façon à remplir la double condition imposée.

as de trèfle	roi de pique	reine de cœur	valet de carreau
valet de cœur	reine de carreau	roi de trèfle	as de pique
roi de carreau	as de cœur	valet de pique	reine de trèfle
reine de pique	valet de trèfle	as de carreau	roi de cœur

Fig. 80

Carrés magiques tels que la somme constante soit égale au millésime d'une année déterminée. — Les carrés magiques que nous avons considérés jusqu'ici sont constitués par la suite naturelle des nombres entiers. Il est possible cependant de déduire d'un carré magique d'un ordre quelconque des carrés magiques dans lesquels les nombres inscrits obéissent à une autre loi de succession.

Parmi ces derniers nous citerons ceux dans lesquels les nombres inscrits, bien que formant une suite naturelle, donnent pour somme constante suivant chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, le millésime d'une année déterminée.

Ces carrés magiques se forment simplement en ajoutant aux nombres inscrits dans un carré auxiliaire de même ordre, un nombre déterminé par le calcul.

Si le millésime choisi est divisible par 3, le carré magique cherché pourra toujours se déduire d'un carré magique du troisième ordre. On divise par 3 le millésime adopté, on retranche 15 du quotient et on a le nombre qu'il suffit d'ajouter à chaque nombre entrant dans la constitution du carré du troisième ordre considéré.

Si le millésime assigné est pair mais non divisible par 4, on

commence par en retrancher 34, puis on prend le quart du résultat pour avoir le nombre à ajouter à chacun des nombres qui figurent dans la composition d'un carré magique du quatrième ordre.

Si, par exemple, nous cherchons à former un carré magique nous donnant comme somme constante l'année 1890, il nous suffira d'ajouter, à chacun des nombres inscrits dans un carré magique ordinaire du quatrième ordre, la constante

$$\frac{1890 - 34}{4} = 464.$$

En d'autres termes, au lieu d'inscrire les 16 premiers nombres, on inscrit dans les cases les 16 nombres formant la suite de 465 à 480.

Considérons, comme autre exemple, l'année 1892, ce millésime étant divisible par 11, il est possible de déduire du carré magique du onzième ordre un nouveau carré magique de même ordre, mais dans lequel chaque rangée de 11 cases donnera le nombre 1892 pour la somme des chiffres qui s'y trouvent inscrits.

A cet effet, retranchons de 1892 la somme constante du carré magique ordinaire du onzième ordre, c'est-à-dire 671 et divisons le reste par 11, ce qui donne 111.

On ajoute alors la constante 111 à tous les nombres qui figurent dans le carré auxillaire, ce qui revient à inscrire la suite naturelle des nombres de 112 à 232.

Nous obtenons ainsi le carré magique représenté ci-dessus et dans lequel le même nombre 1892 peut être obtenu vingt-quatre fois par l'addition des nombres inscrits dans les rangées, dans les colonnes et dans les diagonales, et vingt fois par l'addition des nombres inscrits dans les cases de deux lignes parallèles à une même diagonale, situées de part et d'autre de cette diagonale et ayant ensemble 11 cases, comme par exemple 196, 122, 158, 205, 131, 167, 214, 140, 187, 223 et 149.

112	124	136	148	160	172	184	196	208	220	232	= 1892
147	159	171	183	195	207	219	231	122	123	135	= 1892
182	194	206	218	230	121	133	134	146	158	170	= 1892
217	229	120	132	144	145	157	169	181	194	205	= 1892
131	143	155	156	168	180	192	204	216	229	119	= 1892
166	167	179	191	203	215	227	118	130	142	154	= 1892
190	202	214	226	117	129	141	153	165	177	178	= 1892
225	116	128	140	152	164	176	188	189	201	213	= 1892
139	151	163	175	187	199	200	212	224	115	127	= 1892
174	186	198	210	211	223	114	126	138	150	162	= 1892
209	221	222	113	125	137	149	161	173	185	197	= 1892

Carré magique fourni par la marche du cavalier. — On connaît la récréation qui consiste à écrire sur les cases successives de la course ou d'un circuit du cavalier, les lettres ou les mots d'une ou de plusieurs phrases qu'il s'agit de reconstituer en retrouvant la marche de la pièce du jeu qui sert de *fil d'Ariane*. Si nous remplaçons les mots ou les syllabes par les 64 premiers nombres, nous aurons une course du cavalier en nombres et l'on peut se proposer à ce sujet diverses récréations dont les journaux illustrés fournissent de nombreux exemples.

Nous mentionnerons ici un problème particulièrement difficile consistant à disposer les 64 premiers nombres suivant une marche du cavalier mais de manière à former un carré magique.

Cette question a été étudiée il y a quelques dizaines d'années par Wenzelides, officier retraité qui habitait en Moravie. Après de

nombreux essais il est parvenu à former un carré magique du huitième ordre tel que les emplacements des nombres de 1 à 64 sont donnés par un circuit fermé représentant une course du cavalier.

La somme des nombres inscrits dans les lignes horizontales et les colonnes verticales est égale à 260.

Plus tard, il réussit à former d'autres carrés magiques jouissant de la même propriété et ses résultats furent publiés dans le *Journal des Echecs de Berlin*.

47	10	23	64	49	2	59	6
22	63	48	9	60	5	50	3
11	46	61	24	1	52	7	58
62	21	12	45	8	57	4	51
19	36	25	40	13	44	53	30
26	39	20	33	56	29	14	43
35	18	37	28	41	16	31	54
38	27	34	17	32	55	42	15

Fig. 81

Nous reproduisons une des solutions obtenues. Il y a lieu de remarquer que les nombres inscrits dans les diagonales ne fournissent pas la somme constante 260.

Le Problème des 36 officiers d'Euler. — Dans les *Mémoires de la Société de Flessingue*, Euler n'a pu trouver de solution pour ce qu'il appelle le problème des 36 officiers, sans cependant montrer qu'il n'y avait aucune solution.

Voici l'énoncé de ce problème : « Cette question roulait sur une assemblée de 36 officiers de 6 grades différents et tirés de 6 régiments différents qu'il s'agissait de ranger dans un carré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât 6 officiers tant de différents grades que de régiments différents ».

Ce problème est cité dans les *Récréations mathématiques* de Lucas, Introduction, p. 13, t. 1 ; et dans l'ouvrage d'Arnoux. *Sur les espaces arithmétiques hypermagiques*, p. 5. Dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1896, p. 90), Brocard a donné la note bibliographique

suivante : « Le problème des 16, 25 et 49 officiers a été proposé et résolu dans le journal *Le Siècle*, par A. Feisthamel (Oct. et Nov. 1884).

Le rédacteur, reproduisant le passage cité d'Ed. Lucas, a dit que ses recherches pour le nombre 36 étaient demeurées infructueuses. Celui des 64 officiers a été proposé et résolu par B. Meyniel (Nov. 1884). On peut voir aussi, dans les *Tablettes du chercheur*, les remarquables solutions données par Huber pour 16, 25, 49, 64 et 81 officiers (1894, questions 1678, 1897, 1872, 1845 et 1535) ».

Lomgel répondant à la question 453 de l'*Intermédiaire* posée par E. Maillet (année 1895), conjecture que le problème est impossible pour $4n^2$ officiers, et que l'on devrait chercher la démonstration de ce fait dans la théorie des substitutions. Il ajoute que le problème est toujours possible si le nombre est impair et que la construction du carré dépend simplement de l'application méthodique de substitutions circulaires. Ainsi, si a, b, c,..., désignent les grades différents des officiers et que les indices 1, 2, 3,..., marquent les numéros de leurs régiments, le tableau suivant représente une solution du problème des 25 officiers. [1]

$$\begin{matrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ b_5 & c_1 & d_2 & e_3 & a_4 \\ c_4 & d_5 & e_1 & a_2 & b_3 \\ d_3 & e_4 & a_5 & b_1 & c_2 \\ e_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_1 \end{matrix}$$

Dans le n° 4 de l'année 1898 de l'*Intermédiaire*, un correspondant, M. E. Barbette, de Liège, généralise la question comme il suit :

Disposer en carré $m^2 = [2^k \times (2p + 1)]^2$ officiers de m grades différents et de m régiments différents de manière que, sur chaque colonne horizontale et sur chaque colonne verticale, il se trouve :

Premier problème. — $m = 2^k (2p + 1)$ officiers de chaque grade et de chaque régiment ;

(1) *Intermédiaire* 1896, p. 17.

Deuxième problème. — $2^{k-1} \times (2p + 1)$ groupes de deux officiers de chaque grade ou de chaque régiment ;

Troisième problème. — $2^{k-2} (2p + 1)$ groupes de quatre (2^2) officiers de chaque grade ou de chaque régiment ;

Quatrième problème. — $2^{k-3} \times (2p + 1)$ groupes de huit (2^3) officiers de chaque grade ou de chaque régiment ;

. . . .

$(n + 1)^{me}$ *problème.* — $2^{k-n} \times (2p + 1)$ groupes de 2^n officiers de chaque grade ou de chaque régiment.

Il donne à la suite les tableaux représentatifs de quelques solutions particulières.

Heffter (*Intermédiaire*, 1898, p. 176) a indiqué une solution très simple pour le cas de $(2p + 1)^2$ officiers. En désignant par $(i\ k)$ $(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, l'officier du régiment i et du grade k, l'arrangement sera donné par le tableau suivant.

$$
\begin{array}{lllll}
(1,1) & (2,3) & (3,5)\ldots\ldots & (n, & n-1) \\
(2,2) & (3,4) & (4,6)\ldots\ldots & & (1, n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(n,n) & (1,2) & (2,4)\ldots\ldots & (n-1, & n-2)
\end{array}
$$

Mais Delannoy et Barbette ont fait remarquer (*Intermédiaire*, 1898, p. 252) que cette solution ne s'applique plus à $4n^2$ officiers.

Dans le n° de l'*Intermédiaire* de Novembre 1899, G. Tarry revenant sur la question, limite l'impossibilité du problème à l'hypothèse de $4\ (2p + 1)^2$ officiers.

Enfin, dans une seconde note (*Intermédiaire*, 1900, p. 14) il donne un aperçu d'une démonstration établissant l'impossibilité du problème des 36 officiers.

Cette démonstration, trop longue pour prendre place ici, a été insérée dans un supplément à la livraison de Juillet 1900 de *Mathesis*.

Extension du problème d'Euler. — Plus généralement, on

peut chercher à disposer sur un échiquier de n^2 cases, n^2 pions divisés en n groupes de chacun n pions de la même couleur et portant les numéros successifs 1, 2, 3, 4,..., n, de telle sorte que chaque rangée, et chaque colonne de l'échiquier ne contiennent pas deux pions de la même couleur ou portant le même numéro d'ordre.

Par exemple, pour $n = 3$, avec 3 pions rouges a_1, a_2, a_3 ; trois pions blancs b_1, b_2, b_3, et trois pions noirs c_1, c_2, c_3, on satisfait aux conditions imposées en disposant ces pions sur l'échiquier de 9 cases comme le représente la figure 82 ci-après.

Pour $n = 4$, avec les pions a_1, a_2, a_3, a_4 ; b_1, b_2, b_3, b_4 ; c_1, c_2, c_3, c_4 et d_1, d_2, d_3, d_4, la solution sur l'échiquier de 16 cases est donnée par la figure 83.

La figure 84 donne une solution pour $n = 5$.

Le problème est possible si n est impair ou de la forme $4m$.

Quand on connaît des solutions pour $n = a$ et $n = b$, on peut déduire immédiatement une solution pour $n = a \times b$.

La théorie de ce jeu est intimement liée avec celle des carrés magiques et nous ne pouvons la discuter plus longtemps ici.

a_1	b_2	c_3
b_2	c_1	a_2
c_3	a_3	b_1

Fig. 82.

a_1	b_2	c_3	d_4
c_4	d_3	a_2	b_1
d_2	c_1	b_4	a_3
b_3	a_4	d_1	c_2

Fig. 83.

a_1	b_2	c_3	d_4	e_1
b_5	c_1	d_2	e_3	a_2
c_4	d_5	e_1	a_2	b_3
d_3	e_4	a_5	b_1	c_2
e_2	a_3	b_4	c_1	d_1

Fig. 84.

Carrés magiques avec des pièces de monnaie (1). On peut encore se proposer une question à peu près du même genre en utilisant des pièces de monnaie : en voici une application à un carré

(1) Voir *The Strand Magazine*, Londres, décembre 1896, pp. 720, 721.

du 3me ordre divisé en 9 cases comme celui de la figure 82 ci-dessus.

On place une pièce de 5 francs dans la case centrale c_1, une pièce de 2 francs et une pièce de 1 franc dans la case au-dessous a_3 et l'on demande de placer dans les 7 cases qui restent le plus petit nombre possible de pièces de monnaie ayant cours en France de façon qu'il y ait au moins une pièce dans chaque case, que la somme représentée par la valeur des pièces dans chaque case soit différente, et enfin que la somme des valeurs des pièces dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans les deux diagonales soit égale à 15 francs. On trouve qu'il suffit de prendre 12 pièces additionnelles.

On peut encore proposer des récréations du même genre avec des timbres poste.

CHAPITRE V

PROBLÈMES DES TRACÉS CONTINUS

Ce chapitre est consacré à quelques questions dépendant de la théorie des réseaux géométriques. Nous commencerons par le *Problème* et les *Théorèmes d'Euler* d'où nous déduirons, comme conséquence, la théorie des *Labyrinthes* et celle des *Tracés géométriques* que nous présenterons d'ailleurs d'une façon succincte. Les problèmes réciproques du *jeu d'Hamilton* et de la *marche du cavalier sur l'échiquier* seront traités dans la dernière partie de ce chapitre qui sera terminé par un aperçu sur le jeu de dominos.

Problème d'Euler. — Ce problème a son origine dans un mémoire [1] présenté par Euler en 1736 à l'Académie de Saint-Pétersbourg et dans lequel il donnait la solution d'une question en discussion à cette époque. Il s'agissait d'établir s'il était possible ou non de se promener dans la ville de Kœnigsberg de façon à traverser tous les ponts de cette ville mais en ne passant qu'une fois sur chacun d'eux.

La ville est construite à l'embouchure de la Pregel, rivière qui prend à cet endroit la forme indiquée ci-dessous en entourant l'île de Kneiphof, En 1759, il y avait sept ponts (qui existent encore

(1) « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* », *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ* pour 1736, Saint-Pétersbourg, 1741, vol. VIII, pp. 128-140. Le mémoire a été traduit en français, par M. Ch. Henry; voir Lucas, vol. I, partie II, pp. 21-33.

suivant Baedeker) jetés sur la rivière et occupant les positions indiquées sur notre figure ; il est facile de voir qu'avec une telle disposition le problème n'est pas possible. Euler cependant ne s'est pas

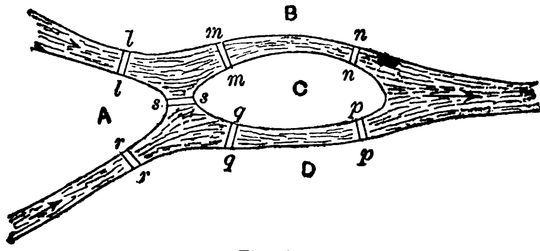


Fig. 85

limité au cas de Kœnigsberg et il a examiné le problème général d'un certain nombre d'îles reliées d'une façon quelconque par des ponts. La solution étant évidemment indépendante de la surface des îles et de la largeur des ponts, s'applique au cas où chaque île se réduit à un point, et chaque pont à une ligne plus ou moins étendue. Nous obtenons ainsi à la limite une figure géométrique à laquelle on donne le nom de réseau.

Dans le problème de Kœnigsberg, la figure a la forme indiquée ci-dessus, les surfaces sont représentées par les points A, B, C, D et les ponts par les lignes l, m, n, p, q, r, s.

Le problème d'Euler revient donc à vérifier si une figure géométrique donnée peut être décrite par un point se déplaçant de façon à parcourir toutes les lignes de la figure en en passant qu'une fois sur chacune d'elles.

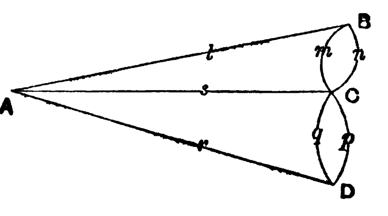


Fig. 86

Une question plus générale consiste à déterminer le nombre de traits nécessaire pour tracer une telle figure en s'imposant comme condition de ne pas passer deux fois sur la même ligne. La figure

qui peut être à deux ou à trois dimensions est représentée par des lignes (droites, courbes ou sinueuses) joignant un nombre déterminé de points, ou par un modèle construit avec des petites baguettes, ou encore au moyen de petites cordes munies à chaque extrémité d'une agrafe permettant de réunir en un point un certain nombre d'entre elles.

La théorie de ces figures est comprise, comme cas particulier, dans les propositions démontrées par Listing dans sa *Topologie* (1). Toutefois nous nous en tiendrons à la méthode exposée par Euler, mais pour nous permettre de présenter le raisonnement d'une façon plus concise, nous allons donner quelques définitions préliminaires.

Un *nœud* (ou une île) est le point de départ ou d'arrivée d'une ligne ou de plus de deux lignes. Une *branche* (un pont ou passage) est une ligne reliant deux nœuds consécutifs : un nœud ne peut donc se trouver au milieu d'une branche. Une *extrémité* (ou agrafe) est l'origine ou la fin d'une branche.

L'*ordre* d'un nœud est le nombre de branches qui aboutissent à ce nœud. Un nœud d'où part ou aboutit une seule branche est un nœud ou une extrémité *libre*. Un nœud est d'ordre *pair* lorsqu'il est le point d'arrivée ou de départ d'un nombre pair de branches ; d'après ce qui a été dit plus haut, il n'existe pas de nœud du second ordre : un pareil nœud est dit *imaginaire*.

Un nœud est d'ordre *impair* lorsqu'il est le point d'arrivée ou de départ d'un nombre impair de branches. Une figure est fermée lorsqu'elle ne présente aucune extrémité libre : une pareille figure est souvent appelée un *réseau fermé*.

Une *route* est constituée par un certain nombre de branches parcourues consécutivement de telle sorte qu'aucune d'elles ne soit suivie deux fois. Une route fermée se termine au point de départ.

(1) *Die Studien*, GÖTTINGEN, 1847, partie X. Voir également Prof. TAIT, un article sur la Topologie de Listing, dans le *Philosophical Magazine*, Londres, janvier 1884, série V. Vol. XVII, pp. 30-46.

Une figure est *tracée d'un trait continu* lorsqu'elle peut être assimilée à une route.

Voici maintenant les conclusions formulées par Euler :

1° Dans un réseau fermé, le nombre des nœuds impairs est toujours pair.

2° Toute figure n'ayant pas de nœuds impairs peut être tracée d'un trait continu (en une route rentrante) par un point partant d'une position quelconque sur le réseau.

3° Une figure qui a deux nœuds impairs, mais deux seulement, peut être décrite d'une façon continue par un point partant de l'un des nœuds impairs pour aboutir à l'autre.

4° Une figure qui a plus de deux nœuds impairs ne peut être décrite complètement en une seule route ; Listing complète cette proposition par ce corollaire : une figure ayant $2n$ nœuds impairs (et pas plus) peut être décrite complètement par n routes distinctes.

Passons à la démonstration de ces diverses propositions.

1° *Le nombre des nœuds impairs dans un réseau fermé est pair.*

Soit b le nombre des branches, le nombre des agrafes sera $2b$.

Représentons par k_n le nombre des nœuds du n^{me} ordre (c'est-à-dire des nœuds où aboutissent n branches). Puisque la figure est fermée, n ne peut être moindre que 2. Le nombre des agrafes à un nœud du n^{me} ordre est n, donc :

$$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \dots + nk_n + \dots = 2b;$$

par suite,

$$3k_3 + 5k_5 + \dots\dots \text{ est pair,}$$

et

$$k_3 + k_5 + \dots\dots \text{ est également pair.}$$

2° *Une figure qui ne présente pas de nœuds impairs peut être décrite d'un trait continu en une route rentrante.*

Puisque la route doit être rentrante, le point de départ est indifférent. Supposons que l'on parte d'un nœud A. Chaque fois que nous arrivons à un nœud nous prenons une agrafe en entrant et nous laissons une agrafe en l'abandonnant. Il n'y a pas de nœuds impairs

et, par conséquent, le nombre des agrafes à chaque nœud est pair ; dès lors, si nous touchons à un nœud quelconque autre que A, nous trouvons toujours une agrafe qui nous donne accès sur une branche non encore parcourue. Par suite, la route nous conduit finalement au nœud A d'où on est parti.

Si nous avons plus de deux agrafes en A, nous pouvons continuer la route par l'une des branches issues de A, non encore parcourues, mais comme plus haut nous revenons finalement au point de départ A.

Il reste maintenant à montrer que la route peut être arrangée de façon à comprendre toutes les branches. Or, considérons chaque branche du réseau comme représentée par une ficelle munie d'une agrafe à chaque extrémité et supposons qu'à chaque nœud toutes les agrafes soient réunies. Le nombre de ces agrafes à chaque nœud étant pair, si on les sépare, il est possible de les accoupler de nouveau par groupe de deux (cet arrangement par paires étant imaginaire). Le réseau dans son ensemble forme alors une ou plusieurs courbes fermées, puisque maintenant chaque nœud consiste simplement en deux extrémités agrafées ensemble.

Si cet accouplement fait au hasard nous donne une seule courbe, la proposition est démontrée ; car en partant d'un point quelconque on peut suivre chaque branche et revenir au point de départ. Mais si cet accouplement fournit en un point quelconque une boucle isolée, L, alors au nœud P par exemple. où elle touche une autre boucle, M, détachons les quatre agrafes qui s'y rencontrent (par exemple, deux de la boucle L et deux de la boucle M) et accouplons-les de nouveau dans un autre ordre, nous amenons ainsi la boucle L à former une partie de la boucle M.

En modifiant de cette manière les accouplements des agrafes, on peut transformer successivement chaque boucle séparée et la faire figurer comme partie d'une seule boucle.

Considérons, par exemple, le cas de trois îles A, B, C, reliées chacune avec les deux autres par deux ponts. La manière la plus défavorable d'accoupler de nouveau les extrémités en A, B, C se-

rait de transformer ABA, ACA et BCB en boucles séparées. Les boucles séparées ABA et ACA se touchant en A, nous pouvons accoupler les agrafes en A de façon à réunir ABA et ACA en une seule boucle ABACA. De même en reliant d'une autre façon, et par deux, les quatre agrafes en B, nous pouvons former une seule boucle avec BCB et ABACA.

De la façon dont Euler s'exprime, il semblerait résulter pour nous qu'il a cherché à formuler une règle pratique permettant de tracer d'une façon continue, sans en connaître la forme, les figures qui nous occupent, mais qu'il a échoué dans ses tentatives. Il a cependant avancé qu'une figure géométrique quelconque peut être tracée complètement en une seule route, à la condition que chacune de ses parties soit parcourue deux fois, mais deux fois seulement, car chaque branche étant ainsi doublée, aucun des nœuds n'est impair et la figure peut par suite se tracer d'un trait continu. Dans ce cas, une figure quelconque peut être décrite complètement d'un mouvement continu sans en connaître la forme ; nous donnons plus loin, page 207 des règles à cet effet.

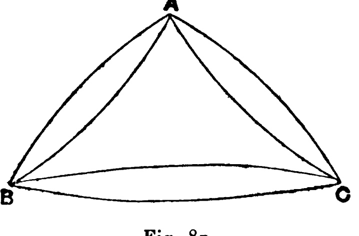


Fig. 87

3° *Toute figure ayant deux nœuds impairs, et seulement deux, peut être décrite d'un mouvement continu par un point qui partirait d'un des nœuds ponr aboutir à l'autre.*

Cette proposition se ramène immédiatement à la précédente. Soient A et Z les deux nœuds impairs.

Supposons tout d'abord que Z ne soit pas une extrémité libre. Nous pouvons évidemment suivre une route allant de A à Z ; si nous imaginons les branches de cette route éliminées, nous enlevons une agrafe en A qui devient un nœud pair. deux agrafes à tous les nœuds intermédiaires entre A et Z qui restent par suite pairs et enfin une agrafe en Z qui devient nœud pair. Tous les

nœuds du réseau ainsi formé sont dès lors pairs ; ce réseau peut donc, d'après 2°, être tracé d'un trait continu et si la route commence en Z, elle se terminera également en Z. Par suite, si ces deux routes sont faites successivement, la première figure sera décrite d'un mouvement continu en commençant en A pour finir eu Z.

Supposons, en second lieu, que Z soit une extrémité libre, alors nous devons faire route de Z à un nœud Y où se rencontrent plus de deux branches. La route de A à Y comprenant toute la figure à l'exclusion du chemin de Y à Z sera effectuée comme plus haut et on complète le tracé en allant de Y à Z.

4° *Une figure n'ayant seulement que* 2n *nœuds impairs peut être décrite complètement en* n *routes distinctes.*

Considérons une route dont l'origine est un nœud impair et suivons-la jusqu'à ce qu'on arrive à un nœud où nous ne trouvons aucun chemin nouveau, il est évident que ce dernier nœud est impair ; car, chaque fois que nous rencontrons un nœud pair sur la route, il se présente un chemin pour en sortir ; et, chaque fois que nous arrivons à un nœud impair, nous comptons une agrafe en entrant et une agrafe en sortant, mais si ce nœud se présente à la fin de la route, nous ne comptons qu'une agrafe. Supprimons cette route par la pensée, il reste une figure avec $2n - 2$ nœuds. Par suite, n routes semblables, nous donneront un ou plusieurs réseaux avec des nœuds pairs seulement. Mais chacun d'eux a un nœud commun avec l'une des routes déjà prise et peut dès lors être décrit en le considérant comme une partie de cette route. Par conséquent, le tracé complet exige n et seulement n routes distinctes.

Il s'ensuit, ainsi d'ailleurs que l'a remarqué Euler, que si le réseau comporte plus de deux nœuds impairs, il ne peut être tracé complètement en une seule route.

Le problème des ponts de Kœnigsberg nous conduit à un réseau contenant quatre nœuds impairs ; par suite, d'après 4°, ce réseau ne peut être parcouru d'un mouvement continu en un seul voyage, mais il peut être parcouru complètement en deux routes distinctes.

Les figures 88 et 89, ci-après, ne contenant que des nœuds pairs, peuvent être tracées d'un trait coutinu. La première de ces figures, un pentagone étoile ou à angles rentrants, était une des figures symboliques des Pythagoriciens ; la seconde représente, dit-on, le sceau ou la signature de Mahomet ; suivant la légende, il l'aurait

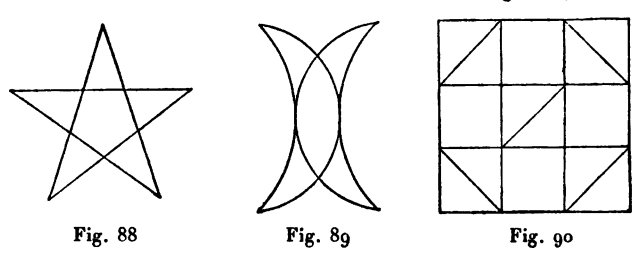


Fig. 88 Fig. 89 Fig. 90

tracée pour la première fois sur le sable avec la pointe de son cimeterre sans la faire quitter le sol ou repasser sur des parties déjà dessinées de la figure ; le fait est possible, puisqu'elle ne contient que des nœuds pairs.

La figure 90 est empruntée à un article du professeur Tait : elle ne contient que deux nœuds impairs, et, par suite, peut être décrite d'un trait continu en partant de l'un de ces nœuds pour aboutir à l'autre.

Citons, comme nouvel exemple, la figure formée en traçant les diagonales d'un polygone convexe de $(2n + 1)$ côtés, un pareil réseau de lignes peut être tracé d'un mouvement continu.

Un échiquier divisé, suivant l'usage, en 64 cases, contient 28 nœuds impairs et 53 nœuds pairs, le dessin de la figure exige quatorze traits continus pour tracer toutes les limites sans passer plus d'une fois sur chaque ligne. Enfin, la figure de la page 122 compte 20 nœuds impairs et, par conséquent, exige dix traits continus pour son tracé.

C'est un théorème bien connu que toute courbe dont le nombre de nœuds égale le degré peut être tracée d'un mouvement continu.

Labyrinthes. — Tout le monde a lu la légende du labyrinthe

de Minos en Crète. On trouve encore çà et là quelques labyrinthes (nous citerons notamment celui de Hampton Court qui est un spécimen assez médiocre de ce genre de construction), et probablement plusieurs de nos lecteurs ont cherché à reconnaître leur route dans certains d'entre eux ou, tout au moins, sur leurs dessins.

Notre but ici est d'étudier la manière de parcourir en tous sens ces sortes de constructions, même lorsqu'on n'en connaît pas le plan.

La théorie des labyrinthes est une conséquence de l'étude que nous venons de faire des théorèmes d'Euler sur les courbes à tracé continu. Les chemins dans un labyrinthe constituent ce que nous avons appelé des *branches* et les carrefours où deux ou plusieurs chemins se rencontrent sont des nœuds. L'entrée du labyrinthe, l'extrémité d'une impasse et le centre du labyrinthe sont des extrémités libres et, par suite, des nœuds d'ordre impair.

Si un labyrinthe ne présente comme nœuds impairs que l'entrée et le centre — ce qui implique l'absence d'impasses — il peut être parcouru d'un mouvement continu. C'est une conséquence de la proposition 3° de la page 201. Egalement, quel que soit le nombre des nœuds impairs dans un labyrinthe, on peut toujours suivre une route conduisant de l'entrée au centre sans revenir sur ses pas, mais cette route ne fait parcourir qu'une partie du labyrinthe. Dans les deux cas que nous venons de mentionner, la route à suivre ne peut être déterminée qu'avec un plan.

Un plan n'est pas nécessaire cependant si nous faisons la même supposition qu'Euler, c'est-à-dire si nous supposons que chaque chemin dans le labyrinthe est doublé. Dans ce cas, nous pouvons donner des règles précises permettant le parcours complet d'un labyrinthe quelconque, même si son plan n'est pas connu. Il est bien évident que décrire deux fois le même chemin dans un labyrinthe n'est pas la manière la plus prompte d'arriver au centre, mais en s'orientant convenablement, le labyrinthe tout entier est parcouru, on est certain de trouver le centre sur sa route à un moment donné, et il est impossible de perdre son chemin.

On voit immédiatement que le tracé complet d'un labyrinthe

ainsi doublé est toujours possible, puisque chaque nœud est rendu pair, et, d'après la proposition 2° d'Euler, en partant de l'entrée on peut parcourir le labyrinthe dans son entier développement ; à un moment donné, on arrive au centre et finalement on revient au point de départ. Cette méthode nous met dans l'obligation de passer deux fois par chaque chemin, et il va de soi que les deux passages sont opposés en direction.

Lorsque le labyrinthe est représenté par un dessin, la route à suivre est généralement facile à déterminer, mais le problème n'est pas toujours aussi aisé quand il s'agit d'une construction, à moins d'en posséder le plan exact. Pour parcourir d'une façon certaine et sans erreur possible, un labyrinthe dont on ne connaît pas le plan, il est nécessaire d'adopter des signes conventionnels pour marquer les chemins suivis et la direction du parcours, par exemple en traçant une flèche à l'entrée et à l'extrémité de chaque chemin, ou encore mieux, peut-être, en marquant le mur sur le côté droit, de sorte qu'on ne s'engagera pas dans un chemin dont les deux côtés seront marqués.

En opérant de la sorte si, lorsqu'on arrive à un nœud, on prend, lorsque la chose est possible, un chemin non encore suivi, ou si, aucun autre chemin ne pouvant être utilisé, on s'engage dans un chemin déjà parcouru une fois seulement, on peut traverser complètement tout labyrinthe à deux dimensions (1).

Bien entendu, un même sentier ne doit pas être suivi deux fois dans la même direction, un chemin déjà traversé deux fois (une fois dans chaque direction) doit être laissé de côté, et à l'extrémité d'une impasse il est nécessaire de revenir sur ses pas en suivant le chemin par où on y a été amené.

Pour beaucoup de personnes, un labyrinthe consiste en une suite de chemins entrelacés au milieu desquels on peut suivre une certaine route aboutissant, au centre, à un espace libre ou à une

(1) Voir *Le problème des labyrinthes*, par G. TARRY, *Nouvelles annales de mathématiques*, mai 1895, série III, vol. XIV.

construction quelconque. Il existe probablement bien peu, si même il en existe, de labyrinthes de cette sorte datant des temps classiques ou du Moyen Age.

Les anciens donnaient le nom de dédale ou de labyrinthe à toute construction un peu compliquée, souterraine ou non, et comprenant des chambres et des couloirs tellement enchevêtrés que le visiteur s'y perdait et ne pouvait en retrouver l'issue ([1]). Une telle construction peut, à la rigueur, être considérée comme un labyrinthe, mais ce n'est pas ce qu'on entend généralement par ce mot. D'ailleurs, les règles précédentes permettent à quiconque veut s'en donner la peine de parcourir en tous sens un monument de ce genre.

Un autre genre de labyrinthes antiques consistait en une route sinueuse couvrant un espace relativement faible et conduisant à une place vide ou à un temple situé au centre ([2]). C'est là un exemple de labyrinthe dans lequel il est possible de s'aventurer sans craindre de perdre son chemin ; mais, comme la surface entière peut être occupée par les sinuosités de la route, la distance à parcourir pour aller de l'entrée au centre peut être considérable quand bien même la surface couverte par le labyrinthe serait très petite.

Comme spécimen du genre, nous citerons le labyrinthe légendaire construit pour le Minotaure. Il était figuré sur le revers des

([1]) Voir par exemple les descriptions du labyrinthe du lac Mœris, données par HÉRODOTE, livre II, c. CXLVIII. — STRABON : livre XVII, c. I, art. 37. — DIODORE : livre I, cc. LXI, LXVI, et PLINE : *Hist. nat.*, livre XXXVI, c. XIII, art. 84-89. Pour d'autres références, voir A. WIEDEMANN, *Herodots Zweites Buch*. LEIPZIG, 1890, p. 522 et suivantes. Voir aussi VIRGILE : *Eneide*, livre V, v. 588. — OVIDE : *Met.*, livre VIII, c. V, CLIX. — STRABON : livre VIII, c. VI.

([2]) Sur les labyrinthes anciens et sur ceux du Moyen Age — particulièrement sur ces derniers — voir un article par M. E. TROLLOPE, dans le *Archaeological Journal*, 1858, vol. XV, pp. 216-235 ; nous lui empruntons la plupart de nos renseignements historiques.

médailles ou monnaies de la ville de Gnosse (qui ne sont pas excessivement rares) et l'une de ses formes est représentée par la figure 91 ci-après. En réalité, le dessin est le même que celui de la figure 92 comme on peut facilement s'en assurer en donnant la forme d'un cercle à cette figure rectangulaire.

M. Inwards a émis l'opinion (1) que ce dessin sur les monnaies de Gnosse était peut-être une réminiscence de celui qui figurait sur un jeton donné par les prêtres de l'antiquité pour guider le profane et lui permettre de reconnaître sa route dans le labyrinthe.

En considérant la figure 91, il suppose chaque mur circulaire

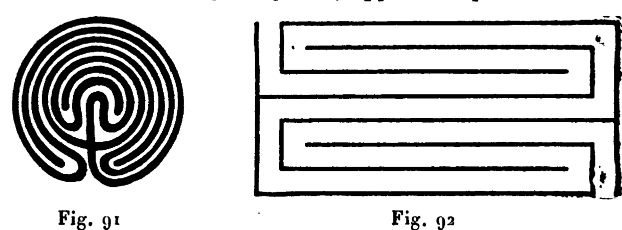


Fig. 91 Fig. 92

remplacé par deux murs équidistants laissant entre eux un passage libre et il obtient ainsi un labyrinthe pour lequel le dessin original servira de clef ou de guide. La route ainsi indiquée s'obtient immédiatement en notant que lorsqu'on arrive à un nœud (c'est-à-dire à un point où il y a un chemin à choisir), le chemin à prendre est celui qui est le plus voisin, à un près, de celui par lequel on est arrivé au nœud. Ce labyrinthe peut aussi se parcourir en s'imposant comme simple règle de suivre toujours le mur à sa droite ou toujours le mur à sa gauche. On peut modifier et compléter quelque peu le tracé du labyrinthe en introduisant des obstacles imprévus, sans toutefois rendre impossible l'application des règles précédentes, mais il n'est guère possible d'augmenter les difficultés. On obtiendrait certainement ainsi un joli jeu, mais bien que l'idée sur laquelle il est basée soit très ingénieuse, elle doit être regardée, pen-

(1) *Knowledge*, Londres, octobre 1892.

sons-nous, comme très invraisemblable. Une autre supposition émise est que la ligne courbe qui figure sur le revers des médailles indique la forme de la corde tenue par un certain nombre de personnes prenant part à une danse rythmique.

Du temps des Grecs et des Romains, l'usage était de faire graver sur certains joyaux des reproductions du labyrinthe de Gnosse et on trouve des dessins semblables mais plus compliqués dans un grand nombre de mosaïques romaines [1]. La copie du labyrinthe crétois était brodée sur plusieurs des manteaux d'apparat des derniers empereurs et c'est probablement pourquoi on la trouve reproduite sur les murs et sur le sol de certaines églises [2]. En Italie et en France, à une époque reculée, ce genre de décorations murales et de pavage prit une grande extension sous forme de rubans présentant des entrelacements fort complexes, mais consistant toujours (autant qu'il nous en souvienne) en une simple ligne. Il était d'usage, au Moyen Age, de disposer au milieu de la nef de certaines grandes églises, des pavages de pierres blanches et noires ou de carreaux de couleur formant, par leurs combinaisons, des méandres compliqués auxquels on donnait le nom de *labyrinthe*, de *chemin de Jérusalem* ou de *La Lieue*. Nous ne saurions dire quelle fut l'origine de ces sortes de pavages. Louis Pâris, dans son *Mémoire du mobilier de Notre-Dame de Reims*, prétend que ces pavages étaient une réminiscence de quelque tradition païenne : c'est possible, cependant, il n'en est fait mention ni dans Guillaume Durand, ni dans les auteurs qui lui sont antérieurs et ayant écrit sur les choses touchant aux églises.

Les plus anciens labyrinthes que nous connaissions ne sont pas antérieurs à la fin du XIIe siècle, et le Seigneur de Caumont, dans son *Voyaïge d'oultremer en Jhérusalem* (en 1418 — publié par le marquis de la Grange — Paris, A. Aubry, 1858), en parlant du labyrinthe de Crête (p. 41), ne dit rien qui puisse faire croire à une

(1) Voir l'ouvrage de Breton : *Pompeia*, p. 303.

(2) Ozanam. — *Graphia aureæ urbis Romæ*, pp. 92, 178.

tradition de cette nature, c'est-à-dire qu'il n'établit aucun point de comparaison entre le labyrinthe du Minotaure et ceux qu'il avait évidemment vus tracés sur le pavé des églises de son pays.

Le labyrinthe de la Cathédrale de Reims s'appelait *Dédale*, *méandre*, *Lieue* ou *Chemin de Jérusalem*. Quelques archéologues ont voulu voir, dans ces pavés à combinaisons de lignes concentriques, un jeu des maîtres des œuvres, en se fondant sur ce fait, que trois de ces labyrinthes, ceux de Chartres, de Reims et d'Amiens, représentent dans certains compartiments, les figures des architectes qui avaient élevé ces cathédrales. Nous n'avons pas à trancher la question.

On trouve les traces de la plupart de ces labyrinthes dans l'ouvrage de Amé intitulé : *Carrelages émaillés du Moyen Age et de la Renaissance*.

Vallet, dans sa description de la crypte de Saint-Bertin de Saint-Omer, établit que les fidèles devaient suivre à genoux les nombreux lacets tracés par les lignes de ces méandres, en mémoire du trajet que fit Jésus de Jérusalem au Calvaire.

La petite basilique de *Reparatus* à Orléans-Ville (Algérie) montre, sur son pavé, une mosaïque que l'on peut prendre pour un de ces labyrinthes, c'est-à-dire un méandre compliqué. Or, cette basilique date de 328, ainsi que le croit F. Prévost.

Cet usage est-il venu d'Orient après les premières croisades ? ou est-il une tradition locale ? nous inclinerions à penser que la représentation des maîtres de l'œuvre sur ces pavages les rattacherait à quelque symbole maçonnique adopté par l'école des maîtres laïques, d'autant que nous ne voyons apparaître ces labyrinthes sur les pavages des églises qu'au moment où les constructions religieuses tombent dans les mains de cette école puissante. Si ces méandres avaient été tracés pour représenter le trajet du Sauveur de la porte de Jérusalem au Calvaire, il est à croire qu'un signe religieux aurait rappelé les stations, ou du moins la dernière ; on ne remarque rien de semblable sur aucun des labyrinthes encore existants ou sur ceux dont le dessin nous est resté.

De plus, nous trouvons des carrelages émaillés qui représentent des combinaisons de lignes ou méandres dans des dimensious si petites, qu'on ne pouvait, à coup sûr, suivre ces chemins compliqués, ni à pied ni à genoux, puisque quelques-uns de ces labyrinthes, comme celui de l'église abbatiale de Toussaints (Marne), n'ont pas plus de 25 centimètres de côté. A vrai dire, ces derniers méandres datent du XIVe siècle et peuvent passer pour une copie d'œuvres plus grandes ; mais encore une fois, les petits et les grands ne renferment aucun signe religieux (¹).

Quoi qu'il en soit, nous citerons parmi les plus beaux spécimens qui existent encore : les décorations murales des Cathédrales de Lucques, d'Aix en Provence et de Poitiers, et les dallages des églises de Sainte-Marie du Transtévère à Rome, de San Vitale à Ravenne, de Notre-Dame à Saint Omer et de la cathédrale de Chartres. Ces derniers dessins étaient probablement faits dans le but de symboliser le passage à travers la vie considérée comme un pèlerinage.

En Angleterre, ces labyrintbes étaient le plus souvent (nous pourrions, peut-être, dire toujours) tracés sur une étendue de terrain gazonné confinant certaine maison religieuse ou de refuge et quelques raisons nous portent à supposer qu'on s'en imposait le parcours comme exercice religieux en récitant un *pater* ou un *ave* à chaque tournant, Après la Renaissance, ces labyrinthes étaient fréquemment appelés Troie-villes ou Retraites de Julien. Parmi les plus beaux spécimens du genre qui existent encore (autant que nous avons pu le vérifier), nous citerons ceux de Rockliff Marshes dans le Cumberland ; d'Asenby, dans le Yorkshire, d'Alkborough dans le Lincolnshire, de Wing dans le Rutlandshire ; de Boughton-Green dans le Northamptonshire ; de Comberton dans le Cambridgeshire, de Saffron Walden dans le canton d'Essex ; et de Chilcombe près de Winchester.

Les labyrinthes plus modernes semblent avoir été introduits —

(¹) VIOLLET-LE-DUC. — *Dictionnaire raisonné de l'architecture française*, tome VI, pp. 152-153.

probablement de l'Italie — durant la Renaissance, et plusieurs des palais ou des grands châteaux construits en Angleterre sous les règnes des Tudor et des Stuart avaient comme annexes des labyrinthes. Ceux qui formaient dépendances des palais royaux de Southwark, Greenwich et Hampton Court étaient particulièrement connus à cause de leur proximité de la Capitale. Ce dernier a été dessiné en 1690 par London et Wise pour Guillaume III qui en faisait son séjour de prédilection ; les divers guides de Londres et de ses environs en contiennent un plan. Pour la majorité des visiteurs qui s'y rendent dans un but de promenade, il est suffisamment compliqué, mais c'est en réalité une construction assez terne qui peut être parcourue complètement en suivant toujours le même côté (soit de droite, soit de gauche) et ne présentant aucun nœud d'un ordre supérieur à 3.

A moins qu'en un certain point la route pour aller au centre bifurque en deux branches qui se réunissent ensuite en formant une boucle dans laquelle se trouve situé le centre du labyrinthe, la partie centrale peut toujours être atteinte en suivant la règle que nous venons de donner, c'est-à-dire en longeant le mur, soit du côté droit, soit du côté gauche. Il n'est guère possible de considérer comme un jeu de patience un labyrinthe pouvant être parcouru d'une façon aussi simple. En supposant l'existence d'une bifurcation, le labyrinthe sera d'autant moins facile à parcourir qu'il présentera plus de nœuds et que leur ordre sera plus élevé ; la difficulté peut même être considérablement augmentée en introduisant des ponts et des tunnels de façon à avoir un labyrinthe à trois dimensions.



Fig 93. — Le labyrinthe d'Hampton Court.

Les arbres géométriques. — Euler n'a fait porter ses recherches que sur les réseaux fermés et dans le problème du labyrinthe on admet l'existence d'un nombre quelconque d'impasses dont les extrémités forment ce que nous avons appelé des nœuds libres. La question peut maintenant se généraliser en supposant que chaque partie de la figure constituant un réseau fermé diminue jusqu'à se réduire à un point. L'arrangement obtenu alors est connu sous le nom d'*arbre géométrique*. Le nombre des tracés continus, nécessaires pour décrire d'une façon complète un *arbre géométrique*, est appelé la *base* de la ramification.

Nous pouvons donner un exemple d'une forme possible de ces arbres au moyen de tringles portant une agrafe ou un crochet à chaque extrémité. Prenant une de ces tiges, nous attachons à chaque extrémité une ou plusieurs tiges semblables, puis à chaque extrémité libre nous fixons de nouveau une ou plusieurs tiges, et ainsi de suite. Chaque extrémité libre et chaque point où se rencontrent deux ou plus de deux tringles constituent ce que nous avons déjà appelé des nœuds. Les tringles elles-mêmes sont les branches ou les chemins.

La théorie des arbres géométriques qui joue déjà un rôle assez important dans certaines branches de l'analyse moderne et qui, peut-être, contient le germe de plusieurs théories chimiques ou biologiques, fut mise à jour dans un mémoire de Cayley (¹) écrit en

(¹) *Philosophical Magazine*, mars 1857, série IV, vol. XIII, pp. 172-176; ou *Collected Works*, Cambridge, 1890, vol. III, n° 203, pp. 242-246. — Voir aussi une note sur les partitions doubles, *Philosophical Magazine*, novembre 1860, série IV, vol. XX, pp. 337-341. Sur le nombre des arbres avec un nombre donné de nœuds, voir le *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, 1889, vol. XXIII, pp. 376-378. Son affinité avec la chimie a été signalée pour la première fois par le Prof. Cayley dans un article sur les corps isomères paru dans le *Philosophical Magazine* de juin 1874, série IV, vol. XLVII, pp. 444-447; la question a été traitée d'une façon plus complète dans son mémoire sur la théorie des arbres à l'Association britannique, en 1875, *Repports*, pp. 257-305.

1856. La discussion de cette théorie a été présentée plutôt analytiquement que géométriquement. Nous nous contenterons de mentionner les résultats suivants.

Le nombre des arbres ayant n nœuds donnés est n^{n-2}. Si on représente par A_n le nombre des arbres ayant n branches et par B_n le nombre des arbres avec n branches libres formant les dernières bifurcations, on a :

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-A_1}(1-x^3)^{-A_2}\ldots = 1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots;$$
$$(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-B_2}(1-x^4)^{-B_3}\ldots = 1+x+2B_2x^2+2B_3x^3+\ldots$$

Au moyen de ces formules nous pouvons déterminer successivement les valeurs de A_1, A_2... et B_1, B_2...

Ces valeurs pour $n = 2$, 3, 4, 5, 6, et 7 sont données dans le tableau suivant :

n	2	3	4	5	6	7
A_n	2	4	9	20	48	115
B_n	1	2	5	12	33	90

Nous allons maintenant traiter quelques questions dans lesquelles on se propose de déterminer une route passant une fois, mais seulement une fois, par tous les nœuds d'une figure géométrique donnée. Ces questions peuvent être regardées comme les inverses de celles du chapitre précédent et leur solution présente de plus grandes difficultés. La théorie générale des problèmes de cette nature n'a peut-être pas été traitée complètement par les mathématiciens, bien que deux cas spéciaux consistant dans le *jeu d'Hamilton* (ou *Icosien*) et *dans la marche du cavalier aux échecs* aient été examinés avec quelques détails. Ce sont ces deux jeux qui vont nous occuper.

Le jeu d'Hamilton. — Ce jeu consiste à déterminer la route à suivre le long des arêtes d'un dodécaèdre régulier pour passer par

tous les sommets une fois seulement. Sir William Hamilton [1] à qui on doit ce jeu — si toutefois le mot jeu est le terme à employer dans la circonstance — représentait les trente sommets du solide par des lettres qui désignaient des villes, et les vingt arêtes constituaient les seules routes possibles. On comprend sans peine l'inconvénient de se servir d'un solide et le dodécaèdre peut être remplacé avantageusement par sa représentation sur une surface plane ainsi que le montre la figure 94. La figure 95 et la figure 96 remplissent également notre but et elles sont plus faciles à tracer.

Le premier problème est « Le voyage autour du monde ». Il

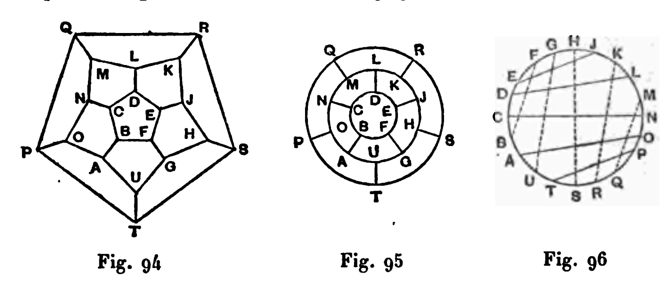


Fig. 94 Fig. 95 Fig. 96

s'agit, en partant d'une ville quelconque, de passer par toutes les autres villes, une seule fois, et de revenir au point de départ; on se donne l'ordre des n villes devant être visitées tout d'abord, n ne surpassant pas 5.

Hamilton a fait connaître la règle pour effectuer un tel voyage à Dublin, en 1857, au congrès de l'Association Britannique. A chaque sommet, trois arêtes seulement aboutissent et si nous arrivons à un sommet quelconque par l'une de ces trois arêtes, nous nous trouvons en présence de deux routes à prendre, l'une à droite, que nous représenterons par d, et l'autre, à gauche, que nous désignerons par g. On s'assure facilement sur la figure que la suite des opérations in-

(1) Voir *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, 1862, vol. V, p. 305; ou *Philosophical Magazine*, janvier, 1884, série V, vol. XVII, p. 42; voir aussi Lucas, *Récréations*, vol. II, part. VII.

diquées dans chacun des membres des égalités suivantes nous conduit au même point et que, par suite, les résultats sont équivalents,

$$gd^2g = dgd, \qquad dg^2d = gd.g, \qquad gd^3g = d^2, \qquad dg^3d = g^2.$$

Les opérations g^5 et d^5 nous ramènent au point de départ, ce que nous représenterons par les égalités

$$g^5 = 1,\ d^5 = 1.$$

Pour résoudre le problème avec une figure ayant trente sommets, la difficulté consiste à établir une relation embrassant trente opérations successives et dont l'effet final serait représenté par l'unité. Or, en nous reportant à la relation $g^2 = d.\ g^3.\ d$ nous voyons que :

$$1 = g^5 = g^2\ g^3 = (dg^3d)g^3 = (dg^3)^2 = \{d(dg^2d)g\}^2 =$$
$$= \{d^2g^3dg\}^2 = \{d^2(dg^3d)gdg\}^2 = \{d^3g^3dgdg\}^2,$$

ainsi

(1) $$\{d^3g^3(dg)^2\}^2 = 1,$$

et semblablement

(2) $$\{g^3d^3(gd)^2\}^2 = 1.$$

Par suite, l'une ou l'autre des suites de mouvements

(1) $dddgggdgdgdddgggdgdg$,
(2) $gggdddgdgdgggdddgdgd$,

indique sur un dodécaèdre la route prise par le voyageur pour passer dans chaque ville. L'arrangement est cyclique et la route peut commencer en un point quelconque de la série des déplacements en transportant d'une extrémité à l'autre le nombre nécessaire de lettres. Le point d'où l'on part est déterminé par l'ordre de certaines villes qui est donné à l'avance.

Ainsi supposons qu'on nous dise de partir de F, d'aller successivement en B, A, U et T, puis de revenir en F après avoir passé par toutes les autres villes. Si, par la pensée, nous nous considérons

comme étant arrivé en F en venant de G, le chemin FB sera représenté par la lettre *g*, mais si nous nous figurons être venu de E en F, le chemin FB sera représenté par la lettre *d*. Le chemin de B à A sera représenté par *g*, et ainsi de suite. Ainsi la route débute soit par *ggqd*, soit par *dggd*. Ce dernier départ ne figurant ni dans la suite (1), ni dans la suite (2), n'entre pas dans nos solutions. Le premier début peut être regardé comme les 1[er], 2[e], 3[e] et 4[e] chemins de (2), ou comme les 4[e], 5[e], 6[e] et 7[e] chemins de (1). Chacun de ces arrangements nous conduit à une route satisfaisant à la question.

Ces routes sont :

FBAUTPONCDEJKLMQRSHGF,

et

FBAUTSRKLMQPONCDEJHGF.

Une bonne précaution à prendre pour éviter de passer une seconde fois sur la même ville consiste à faire une marque ou à placer un jeton sur chaque angle aussitôt qu'on y arrive. Un jeu semblable peut se faire avec tout autre corps solide ne comptant que trois arêtes à chaque sommet. De tous ces solides, le cube et le tétraèdre sont les plus simples, mais le lecteur peut construire lui-même un nombre quelconque de figures planes représentant d'autres solides que ceux de la page 216. Hamilton en a donné plusieurs exemples. Dans tous les cas on doit déduire de formules analogues à celles établies page 217, des relations cycliques telles que (1) et (2) données plus haut. On suit alors pour la solution la marche déjà indiquée. Cette méthode peut aussi être employée pour trouver une règle permettant de décrire un labyrinthe quelconque dans lequel aucun nœud n'est d'un ordre supérieur à trois.

Pour ce qui est des solides ayant des sommets où aboutissent plus de trois arêtes, tels que l'octaèdre où quatre arêtes se rencontrent à chaque sommet, et l'icosaèdre qui compte cinq arêtes à chaque sommet, en arrivant à chacun des sommets nous nous trouvons en présence de plus de deux chemins à suivre. Par suite (à

moins de supprimer un certain nombre d'arêtes), il est nécessaire de modifier et de donner de l'extension à la notation symbolique mentionnée plus haut avant de l'appliquer aux solides de cette nature et aux figures planes qu'on peut en déduire. Nous abandonnons cette étude à ceux de nos lecteurs désireux d'imaginer un nouveau jeu.

M. Hermary a donné une autre solution fort élégante du problème d'Hamilton. Elle consiste à développer sur un plan les douze pentagones réguliers formant les faces du dodécaèdre de façon que chacun d'eux ait avec le précédent un côté commun, mais la solution est géométrique et ne s'applique pas directement à des solides plus compliqués.

Hamilton a imaginé un autre jeu dans lequel partant d'une ville quelconque on se rend dans un certain nombre d'autres villes désignées, dans un ordre spécifié à l'avance, puis on passe une fois et une seule fois par toutes les villes restantes, enfin le voyage se termine à une ville connue. Il a également proposé d'étudier comment on devait bloquer un certain nombre de villes (qui, par suite, ne pouvaient être traversées) afin d'obtenir un effet déterminé et variable suivant les cas. Si nos recherches sont complètes, ces problèmes n'ont pas encore été soumis à l'analyse mathématique.

Marche du cavalier sur l'échiquier. — Un autre problème géométrique dont l'étude a donné lieu à des recherches vraiment curieuses comme ingéniosité et qui présente quelque analogie avec celui d'Hamilton, consiste à déplacer sur un échiquier un cavalier de façon à lui faire occuper successivement les 64 cases sans passer deux fois sur la même.

La littérature sur ce sujet est si étendue (1) qu'il serait préten-

(1) Pour la bibliographie du sujet, voir Der Linde, *Geschichte und Literatur des Schachspiels*, Berlin, 1874, vol. II, pp. 101-111. Sur le problème lui-même voir un mémoire de P. Volpicelli dans *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, Rome, 1872, vol. XXV, pp. 87-162; également *Applications de*

tieux de notre part de chercher à présenter l'historique complet des diverses solutions de ce problème, nous nous contenterons de réunir quelques notes, prises un peu au hasard, sur certaines solutions et en particulier sur celles dues à De Moivre, Euler, Vandermonde, Warnsdorff et Roget.

Sur un échiquier contenant un nombre pair de cases, la route à suivre peut être rentrante ou non, mais si le nombre des cases est impair, la route ne peut être rentrante. Car si le cavalier part d'une case blanche, son premier mouvement l'amène sur une case noire, le suivant sur une case blanche, et ainsi de suite. Par conséquent, après son passage sur toutes les cases d'un échiquier d'un nombre impair de cases, le dernier mouvement doit le laisser sur une case de la même couleur que celle d'où il est parti, et dès lors aucun mouvement ne pourra réunir ces deux cases.

Les solutions les plus anciennes dont nous ayons connaissance sont celles données à la fin du XVII[e] siècle par De Montmort et De Moivre (1). Elles s'appliquent à l'échiquier ordinaire de 64 cases et reposent sur la division mentale de l'échiquier en un carré central intérieur de seize cases entouré par une enceinte de deux rangées. Si, à l'origine, le cavalier est placé sur une case de la bande extérieure, il se déplace le long de cette bande et toujours dans le même sens, de façon à toucher chaque case; il ne pénètre dans le carré central que dans le cas de nécessité absolue. Quand les cases de l'enceinte ont toutes été occupées successivement, l'ordre des mouvements à faire prendre au cavalier pour le faire passer sur les cases restantes se détermine sans grande difficulté. L'opération est con-

l'analyse mathématique au jeu des Echecs, par C.-F. DE JAENISCH, 3 vol., Saint-Pétersbourg, 1862-63; et des articles du général PARMENTIER, dans les comptes rendus de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1891, 1892, 1894.

(1) Nous ne savons dans quel ouvrage elles furent publiées pour la première fois. Elles sont mentionnées par OZANAM et MONTUCLA; voir OZANAM, édition de 1803, vol. I, p. 178; édition de 1840, p. 80.

duite en sens contraire lorsqu'à l'origine le cavalier est placé sur une case du carré central.

Cette méthode est applicable à des carrés et à des rectangles de toutes dimensions, elle est rendue suffisamment compréhensible par la solution de De Moivre donnée dans la figure ci-après. Les nombres inscrits dans les diverses cases sur cette figure représentent

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

Fig. 97
Solution de De Moivre

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

Fig. 98
Solution d'Euler pour le carré de 36 cases.

l'ordre dans lequel ces cases doivent être successivement occupées. Nous avons placé à côté une solution par route rentrante, due à Euler et s'appliquant à un échiquier de 36 cases. Il est avantageux, pour se guider sur l'échiquier, de placer un jeton sur chaque case au moment où le cavalier l'abandonne.

Comme étude sérieuse de la question faite ensuite nous mentionnerons l'essai tenté par Euler en 1759 (1), à l'instigation de Bertrand, de Genève, qui, un peu plus tard, (en 1778) en fit l'exposition Cette méthode est applicable à des tableaux de toutes formes et de toutes dimensions, mais d'une façon générale, les solutions qu'elle

(1) *Mémoires de Berlin* pour 1759, Berlin, 1766, pp. 310-337; ou *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, Saint-Pétersbourg, 1849, vol. I, pp. 337-355.

donne ne sont pas symétriques et on en saisit péniblement les liaisons mutuelles.

Euler commence par faire mouvoir au hasard le cavalier sur l'échiquier, jusqu'à ce qu'il ne puisse plus se déplacer ; avec un peu d'attention, la manœuvre peut être dirigée de façon qu'il ne reste plus que quelques cases à occuper : représentons-les par *a*, *b*, *c*,..., La méthode consiste alors à déterminer certaines règles permettant d'intercaler les cases vacantes dans différentes parties du circuit et aussi de rendre le circuit rentrant.

L'exemple suivant cité par Legendre comme étant un des cas les plus difficiles, est une application de la méthode. Supposons que le cavalier ait suivi la route 1, 2, 3,.,..., 60 représentée par la figure 99 ci-dessous et qu'il ne reste plus que quatre cases *a*, *b*, *c*, *d* à occuper.

On commence par rendre rentrante la route de 1 à 60. La case 1 commande une case *p*, *p* étant 32, 52 ou 2 ; la case 60 commande une case *q*, *q* étant 29, 59 ou 51. Alors, si deux de ces valeurs de *p* et *q* diffèrent d'une unité, la route peut être rendue rentrante. C'est le cas ici pour $p = 52$ et $q = 51$. Ainsi, les cases 1, 2, 3,...51 ; 60, 59,..., 52 forment une route rentrante de soixante mouvements. Par suite, en remplaçant les nombres 60, 59..., 52 par 52, 53,..., 60, les sauts seront numérotés consécutivement. Nous conseillons au lecteur, qui désire suivre avec facilité les détails que nous allons donner, de construire, avant d'aller plus loin, le carré d'Euler avec ses divisions.

Il s'agit maintenant d'introduire les cases *a*, *b*, *d*, dans la route. Dans le nouveau diagramme de soixante cases formé comme nous l'avons expliqué, la case *a* commande les cases numérotées 51, 53, 41, 25, 7, 5 et 3. Le choix de l'une de ces cases est indifférent, supposons que l'on prenne 51. Alors 51 doit être placé au dernier rang de la route sur les soixante cases, de sorte que nous pourrons la continuer par les mouvements *a*, *b*, *d*,. Par conséquent, si l'on ajoute 9, c'est-à-dire 60-51, à chaque nombre du diagramme construit, en remplaçant 61, 62, 63,..., 69 par 1, 2, 3,..., 9, nous ob-

tenons une route partant de la case occupée primitivement par 60, le soixantième mouvement se fait sur la case occupée à l'origine par 51 et les soixante et unième, soixante-deuxième, soixante-troisième mouvements nous conduisent respectivement aux cases *a*, *b*, *d*.

Il reste encore à introduire la case *c*. Or, puisque *c* commande la case portant actuellement le n° 25 et que 63 commande la case numérotée 24, on peut opérer comme nous l'avons déjà fait en premier lieu pour obtenir une route rentrante. En fait, les cases nu-

55	58	29	40	27	44	19	22
60	39	56	43	30	21	26	45
57	54	59	28	41	18	23	20
38	51	42	31	8	25	46	17
53	32	37	*a*	47	16	9	24
50	3	52	33	36	7	12	15
1	34	5	48	*b*	14	*c*	10
4	49	2	35	6	11	*d*	13

Fig. 99

22	25	50	39	52	35	60	57
27'	40	23	36	49	58	53	34
24	21	26	51	38	61	56	59
41	28	37	48	3	54	33	62
20	47	42	13	32	63	4	55
29	16	19	46	43	2	7	10
18	45	14	31	12	9	64	5
15	30	17	44	1	6	11	8

Fig. 100

Exemple de la méthode d'Euler.

mérotées 1, 2, 3,..., 24 ; 62, 63,..., 25, *c* constituent une marche du cavalier ; nous remplaçons 63, 62,..., 25, par les nombres 25, 26,..., 63 et alors le n° 64 tombe sur la case *c*. En opérant ainsi, on obtient une route couvrant sans lacune l'échiquier.

Enfin, cette route doit être rendue rentrante. Tout d'abord, les cases 1 et 64 doivent être situées dans le voisinage l'une de l'autre et ceci peut s'effectuer comme il suit : Prenons une des cases commandées par 1, 28 par exemple, 28 à son tour commande 1 et 27. Par suite, les cases 64, 63,..., 28 ; 1, 2, 3,..., 27 forment une route, et nous représenterons cette disposition sur le diagramme en remplaçant les n°ˢ 1, 2,..., 27 par 27, 26,..., 1.

Maintenant, la case occupée par 1 commande les cases 26, 38, 54, 12, 2, 14, 16 et 28 ; et la case 64 commande les cases 13, 43, 63, 55. Les cases 13 et 14 étant consécutives, il en résulte que les cases

64, 63,..., 14 ; 1, 2, 3,..., 13 forment une route. Dès lors, en remplaçant les nombres 1, 2, 3,.... 13 par 13, 12,..., 1, on obtient une route rentrante couvrant l'échiquier et représentée par la seconde figure de la page 223.

Euler a montré comment il était possible de déduire d'une route rentrante quelconque sept autres routes rentrantes.

Il n'est pas difficile non plus d'appliquer la méthode de façon à obtenir une route commençant à une case donnée et finissant à une autre case également donnée.

Euler s'est occupé ensuite des modifications à faire subir à sa méthode pour en permettre l'application à certains cas comprenant des conditions restrictives.

Un exemple intéressant est celui dans lequel les trente-deux premiers mouvements doivent s'effectuer sans sortir de la moitié de l'échiquier ; la figure ci-après représente une des solutions de ce

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

Fig. 101
Solution d'Euler pour les deux moitiés de l'échiquier.

50	45	62	41	60	39	54	35
63	4	51	48	53	36	57	38
46	49	44	61	40	59	34	55
43	64	47	52	33	56	37	58
26	5	24	1	20	15	32	11
23	2	27	8	29	12	17	14
6	25	4	21	16	19	10	31
3	22	7	28	9	30	13	18

Fig. 102
Solution de Roget pour les deux moitiés de l'échiquier.

cas. L'ordre des 32 mouvements peut être déterminé par la méthode d'Euler. Il est, d'ailleurs, évident que si l'on ajoute 32 à chacun des nombres inscrits dans les cases parcourues pendant les 32 premiers mouvements, nous obtenons une suite correspondante de mouvements de 33 à 64 qui couvrent l'autre moitié de l'échi-

quier. Mais, généralement, la case numérotée 33 n'est pas commandée par la case 32 et ne donne pas le passage au cavalier, de même la case 64 n'est pas commandée par 1 ; Euler, cependant, a montré qu'il était possible d'effectuer les 32 premiers mouvements, de telle sorte qu'en faisant tourner de deux angles droits, la moitié de l'échiquier contenant les mouvements de 32 à 64, les deux routes n'en forment plus qu'une seule rentrante.

En représentant par x et y les coordonnées d'une case quelconque par rapport à deux côtés consécutifs de l'échiquier, nous pouvons appeler case complémentaire celle dont les distances aux côtés opposés sont respectivement égales à x et y. Ainsi, x et y désignant la colonne et la rangée d'une case, les deux cases (x, y) et $(9 - x, 9 - y)$ seront complémentaires. Par conséquent, dans la solution d'Euler deux nombres inscrits dans deux cases complémentaires diffèrent de 32 : par exemple, la case (3, 7) est complémentaire de la case (6, 2), l'une est occupée par 57 et l'autre par 25.

La méthode de Roget décrite plus bas peut également être suivie pour donner des solutions par demi-échiquier. Nous en donnons un exemple ci-dessus.

Euler consacre la fin de son mémoire à montrer comment sa méthode s'applique à des figures en croix ou à d'autres rectangles. Nous citerons particulièrement son élégante solution symétrique et en une route rentrante sur un carré de cent cases, c'est-à-dire sur le damier français.

Les recherches sur ce même problème faites dans la suite et présentant quelque intérêt sont dues à Vandermonde [1], qui traita la question par l'arithmétique. L'idée de sa méthode est de tracer au hasard deux ou plus de deux routes indépendantes couvrant l'échiquier, puis de les relier entre elles de façon à n'avoir que la seule

(1) *L'histoire de l'Académie des sciences* pour 1771, Paris, 1774, pp. 566-574.

route cherchée. Il définit la position d'une case sur l'échiquier par une fraction $\frac{x}{y}$ dont le numérateur x représente le rang de la case à partir de l'un des côtés, et dont le dénominateur y désigne son rang à partir du côté adjacent ; ceci revient à dire que x et y sont les coordonnées de la case par rapport à deux côtés consécutifs de l'échiquier. Dans une série de fractions représentant la marche du cavalier, la différence entre les numérateurs de deux fractions consécutives ne peut être que 1 ou 2, tandis que la différence entre les dénominateurs correspondants est respectivement 2 ou 1. De plus, x et y ne peuvent être moindres que 1 ou plus grands que 8. Cette notation est commode, mais Vandermonde ne l'a utilisée que pour déterminer une solution particulière du problème pour un échiquier de soixante-quatre cases ; sa méthode est analogue à celle suivie par Euler, elle n'est applicable qu'aux carrés d'un ordre pair. La route à laquelle il est arrivé est définie, au moyen de sa notation, par les fractions suivantes :

$$\frac{5}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{8}{2},\ \frac{6}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \frac{7}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{6},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{6},$$

$$\frac{2}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{8},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{1},$$

$$\frac{4}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{8},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{7},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{6},\ \frac{8}{8},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{4},\ \frac{7}{2},\ \frac{5}{1},\ \frac{6}{3}.$$

La route est rentrante mais non symétrique. S'il avait eu l'idée de transporter les trois premières fractions à la fin de la série, il aurait obtenu deux circuits symétriques de trente-deux mouvements réunis non symétriquement et il lui aurait été possible de donner plus d'extension au problème. Vandermonde examina également le cas du cavalier se déplaçant dans un cube divisé en petits cubes élémentaires.

En 1773, Collini [1] proposa l'usage exclusif de routes symétri-

[1] *Solution du problème du cavalier au Jeu des Echecs*, Mannheim, 1773.

ques tracées sans liaison avec la case initiale, mais réunies ensuite de façon à permettre au cavalier de partir de cette case. C'est là le fondement des méthodes modernes. Cette méthode fut retrouvée, en 1825, par Pratt (1) et en 1840 par Roget, depuis elle a été employée par plusieurs auteurs; mais ni Collini, ni Pratt ne montrèrent beaucoup d'habileté en l'appliquant. Nous examinons plus loin la règle donnée par Roget.

L'une des solutions les plus ingénieuses du problème de la marche du cavalier est celle qui fut présentée en 1823 par Warnsdorff (2). Sa règle consiste à placer toujours le cavalier sur la case d'où il commandera le plus petit nombre possible de cases n'ayant pas encore été occupées. La solution ne donne pas une route symétrique et rentrante et il est difficile de la tracer pratiquement. L'exactitude de la règle n'a pas été démontrée, mais elle a été vérifiée jusqu'ici pour tous les cas examinés; elle s'applique probablement aussi à tous les casiers rectangulaires pouvant être parcourus d'une façon complète par le cavalier. Chose curieuse, dans la plupart des cas, une faute commise, à moins que ce ne soit dans les trois ou quatre derniers mouvements, ne modifie pas le résultat final.

Warnsdorff avait avancé que si, en appliquant sa règle, on trouve que le cavalier a le choix entre deux ou plus de deux cases, il est indifférent de le placer sur une case plutôt que sur une autre. Ceci n'est pas exact, et on a relevé, avec beaucoup d'ingéniosité, deux ou trois cas fautifs, mais pour tomber accidentellement sur une de ces routes défectueuses, il faudrait une mauvaise chance exceptionnelle.

Cette méthode a été appliquée à des figures de formes variées, principalement à des casiers rectangulaires, en forme de croix et circulaires (3). Dans toutes les recherches plus récentes, faites sur

(1) *Studies of Chess*, 6e édition, Londres, 1825.

(2) *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*, Schmalkalden, 1823; voir *Jaenisch*, vol. II, pp. 56-61, 273-289.

(3) Voir l'ouvrage de Collini, *Del cavalho degli Scacchi*, Paris, 1836.

cette question, on s'impose comme condition additionnelle que la route doit être rentrante ou, plus généralement, qu'elle doit commencer et finir par des cases déterminées.

La solution la plus complète et la meilleure de toutes celles que nous connaissons — et qui est très peu répandue, pensons-nous — est due au Dr Roget (1). Il divise la route en quatre circuits que l'on peut combiner de manière à permettre au cavalier de partir d'une case quelconque pour arriver à une autre case quelconque de couleur différente. Si, par suite, on choisit cette dernière case parmi une de celles qui sont commandées par la case de départ, on a une route rentrante. D'un autre côté, la règle ne s'applique qu'aux casiers comprenant $(4n)^2$ cases ; on ne peut donc s'en servir, par exemple, pour le damier français qui contient cent cases.

Roget commence par diviser le casier de soixante-quatre cases en quatre quartiers contenant chacun seize cases ; ces seize cases à leur tour peuvent être arrangées en quatre groupes dont chacun est constitué par quatre cases formant une route fermée du cavalier. Toutes les cases de chacune de ces routes élémentaires portent une même lettre *l*, *e*, *a* ou *p* suivant les cas. Ainsi qu'on peut le voir sur la figure 1 ci-après, la route des quatre cases marquées *l* et celle des quatre cases désignées par *p* forment des losanges ; les routes représentées respectivement par les voyelles *e* et *a* forment des carrés.

Maintenant les seize cases qui, sur l'échiquier, portent la même lettre peuvent être combinées de façon à constituer un circuit, et quel que soit son point de départ nous pouvons le terminer sur une autre case quelconque, pourvu qu'elle ne soit pas de la même couleur que la case de départ. Si le choix de la case terminus est indif-

(1) *Philosophical magazine*, avril 1840, série III, vol. XVI, pp. 305-309 : voir aussi le *Quaterly Journal of Mathematics* pour 1877, vol. XIV, pp. 354-359. Quelques solutions basées sur la méthode de Roget sont données dans le *Leisure Hour*, 13 septembre 1873, pp. 587-590; voir également *ibid.*, décembre 20, 1873, pp. 813-815.

férent, le circuit peut être rentrant, et dans ce cas nous pouvons faire en sorte que le mouvement du cavalier dans chaque groupe de quatre cases soit le même. Par exemple, toutes les cases marquées *p*, peuvent être arrangées dans le circuit représenté par les nombres successifs de 1 à 16 dans la figure 2 ci-après. De même, toutes les cases marquées *a* figurent dans le circuit indiqué par les nombres successifs de 17 à 23 ; toutes les cases *l* entrent dans le circuit de 33 à 48 et enfin, l'ensemble des cases *e* nous fournit le circuit de 49 à 64. Chacun de ces circuits est symétrique et forme une route rentrante. Les circuits sont dits de même espèce lorsqu'ils sont représentés, soit par des voyelles, soit par des consonnes ; ils sont d'espèces différentes lorsqu'ils sont représentés par des voyelles et par des consonnes.

Le problème général sera résolu en formant avec les quatre cir-

34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42

Fig. 103

l	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*
a	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*
e	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*
p	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*
l	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*
a	*p*	*l*	*e*	*a*	*p*	*l*	*e*
e	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*
p	*a*	*e*	*l*	*p*	*a*	*e*	*l*

Fig. 104

Solution de Roget.

cuits une route partant d'une case donnée quelconque pour se terminer au soixante-quatrième mouvement sur une autre case également donnée (de couleur différente). A cet effet, Roget donne les deux règles suivantes :

1° Si les cases initiale et finale sont désignées l'une par une consonne et l'autre par une voyelle, on suit alternativement des cir-

cuits représentés par des consonnes et des voyelles, en commençant par celui (de seize cases) défini par la lettre de la case de départ et en terminant par le circuit défini par la lettre de la case d'arrivée.

2° Si les cases initiale et finale sont désignées toutes les deux par des consonnes ou toutes les deux par des voyelles, on choisit d'abord une case Y appartenant au même circuit que la case finale, Z, et à un mouvement de distance de cette case; puis on prend une case X appartenant à l'un des circuits différents d'espèce de celui de la case finale Z, et à un mouvement de distance de Y. Cette double opération est toujours possible. Laissant alors momentanément de côté les cases Z et Y, on peut, d'après la règle déjà donnée, voyager de la case initiale à la case X en soixante-deux mouvements, puis de là, à la case finale en deux mouvements.

Il faut noter cependant que dans les deux cas, les cases dans chacun des trois premiers circuits, doivent être choisies de telle sorte que la route n'aboutisse pas à une case d'angle, et il est également préférable qu'elle ne se termine pas sur l'une des cases en bordure. Ceci exige quelques précautions. Autant qu'il est possible, en tenant compte de ces prescriptions, il est avantageux d'avoir les circuits rentrants et de prendre chacun d'eux ou chacun des groupes de quatre cases dans le même sens de rotation.

Comme exemple, supposons que la case de départ soit celle numérotée 1 dans la figure 103 de la page 229, qui appartient à l'un des circuits *p*, et que la case d'arrivée soit la soixante-quatrième, qui appartient à l'un des circuits *e*. Nous sommes dans le cas de la première règle : par suite nous prendrons en premier lieu les seize cases marquées *p*, puis les seize cases marquées *a*, ensuite les seize cases marquées *l* et enfin les seize cases dénotées *e*. La figure indique l'une des routes à suivre. Elle est rentrante puisque la case soixante-quatre est commandée par la case 1. De plus les quatre circuits dans le diagramme sont symétriques, rentrants, et pris dans la même direction, le seul point où il semblerait y avoir une lacune dans l'uniformité de la route et au passage de la case 32 à la case 33.

Une règle analogue à celle de Roget pour obtenir des routes rentrantes a été présentée depuis par plusieurs autres auteurs et en particulier par De Polignac (¹) et par Laquière (²) qui ont traité longuement le sujet. Ni l'un ni l'autre ne paraissent avoir eu connaissance des théorèmes de Roget. De Polignac, comme Roget, assigne, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, des lettres aux divers carrés, et il avance qu'une règle semblable est applicable à tous les carrés d'ordre pair.

La méthode de Roget s'applique également aux demi-échiquiers, comme le montre la figure de la page 223.

Un autre mode de subdivision du casier en circuits fermés pouvant être réunis a *posteriori* en une seule route, a été donné en 1843 par Moon (³). Il divise le casier en un carré central contenant 4^2 cases et une bordure au pourtour (voir la figure ci-après). Cette bordure peut être divisée en quatre circuits fermés, contenant chacun douze cases désignées respectivement par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*. Le carré central peut être divisé semblablement en quatre circuits fermés, contenant chacun quatre cases représentées par les lettres A, B, C, D. Ces diverses routes se réunissent comme il suit :

Si nous nous déplaçons de dedans en dehors, du carré central à la bordure, on peut sauter de la case A sur l'une des cases *b*, *c* ou *d* (mais non sur la case *a*) et de même pour les autres lettres. Si nous nous déplaçons de dehors en dedans, de la bordure au carré central, on saute de *a* sur D, ou de *d* sur A, ou de *b* sur C, ou de *c* sur B, suivant le cas qui se présente.

Par suite, si la case initiale est *a*, on peut suivre l'un ou l'autre des cycles *a*D*b*C*d*A*c*B, ou *a*D*c*B*d*A*b*C. En appliquant ces règles il est toujours possible de réunir les diverses routes en un seul parcours

(¹) *Comptes rendus*, avril 1861 ; et *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1881, vol. IX, pp. 17-24.

(²) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1880, vol. VIII, pp. 82-102, 132-158.

(³) *Cambridge Mathematical Journal*, 1843, vol. III, pp. 233-236.

qui, en général, n'est pas rentrant. Il est avantageux de choisir les cases dans chaque circuit dans une seule direction et toujours la même, mais dans la bordure extérieure un circuit ne doit pas aboutir à une case d'angle, et pour éviter que le fait se produise, on peut être dans l'obligation de changer la direction d'un des circuits.

La règle de Moon peut être modifiée de façon à obtenir une route couvrant toutes les cases d'un carré quelconque et la route

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*A*	*B*	*C*	*D*	*d*	*c*
d	*c*	*C*	*D*	*A*	*B*	*b*	*a*
a	*b*	*B*	*A*	*D*	*C*	*c*	*d*
c	*d*	*D*	*C*	*B*	*A*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

Fig. 105
Solution de Moon

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Fig. 106
Solution de Jaenisch.

peut commencer et se terminer sur deux cases données quelconques, mais il est inutile d'entrer ici dans de plus longs détails.

La méthode que donne Jaenisch comme fondamentale ne diffère pas essentiellement de celle de Roget. Elle conduit à huit formes semblables à celle du second diagramme ci-dessus dans lequel la somme des nombres dans chaque colonne et dans chaque ligne est 260. Mais bien que la solution soit symétrique elle n'est pas, selon nous, aussi facile à reproduire que celle présentée par Roget.

On n'a pas encore pu déterminer exactement, jusqu'à présent, le nombre des solutions du problème. Legendre (1) a posé la question, mais Minding (2) est le plus ancien auteur qui ait tenté d'y

(1) *Théorie des Nombres,* Paris, 2e édition 1830, vol. II, p. 165.

(2) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* 1852, vol. III, pp. 147-156; *Journal de Crelle,* 1853, vol. XLIV, pp. 73-82.

répondre. Des recherches plus récentes ont montré que, d'une part, le nombre des routes possibles est plus petit (1) que le nombre des combinaisons de 168 objets pris 63 à la fois, et que, d'un autre côté, ce nombre est plus grand que 31 054 144 ; ce dernier nombre étant celui des routes rentrantes d'un type particulier (2).

Il existe bien des problèmes du même genre dans lesquels on demande de déterminer les routes permettant à une pièce se déplaçant suivant des lois connues (par exemple une pièce d'un jeu d'échec comme le roi, le cavalier, etc.) de voyager sur un échiquier, en partant d'une case donnée pour arriver à une autre case également donnée, en passant successivement une fois, et une fois seulement, sur toutes les cases de l'échiquier ou sur un certain nombre de cases fixées.

La méthode d'Euler peut servir à la recherche d'une telle route; ainsi il l'a appliquée à la détermination de la route rentrante permettant à une pièce se déplaçant successivement de deux cases comme la tour, puis d'une case avec la marche du fou, d'occuper successivement toutes les cases noires d'un échiquier.

Comme autre exemple, une tour sur un échiquier de n^2 cases peut toujours être déplacée de manière à passer sur toutes les cases une fois et une fois seulement. De plus, partant d'une case quelconque, si n est pair, sa route peut se terminer sur une autre case quelconque de couleur différente, et si n est impair, sa route peut se terminer sur une case quelconque de même couleur (3).

Il nous paraît suffisant d'avoir traité le problème classique relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier ordinaire, et il nous paraît superflu de discuter d'autres problèmes du même genre.

Les dominos. — Tout le monde sait que l'on désigne sous le nom de dominos des espèces de petits parallélépipèdes rectangles

(1) Jaenisch. — Vol. II, p. 268.
(2) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1881, vol. IX, pp. 1-17.
(3) L'*Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris, juillet 1901, p. 153.

dont la largeur est double de l'épaisseur et dont la longueur est double de la largeur. La partie inférieure est ordinairement en ébène ou en un bois noir quelconque, la face supérieure, en ivoire ou en os, est divisée, au moyen d'une ligne, en deux carrés qui sont blancs ou marqués d'un certain nombre de gros points teints en noir.

Le jeu se compose ordinairement de 28 dominos formant les combinaisons complètes de 8 blancs (zéros), 8 as (un), 8 deux, 8 trois, 8 quatre, 8 cinq et six, pris deux à deux.

Quand les numéros inscrits sur les deux moitiés d'un domino sont égaux, le domino s'appelle *double*.

Voici la notation d'un jeu de domino ordinaire, depuis le double blanc jusqu'au double six.

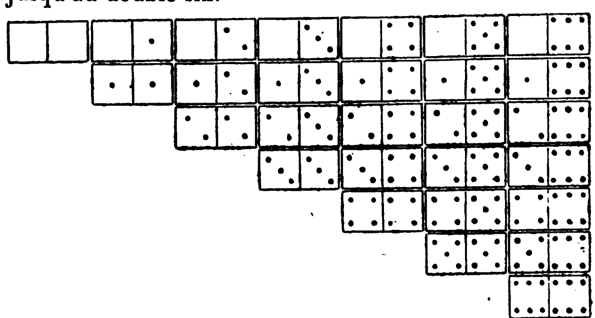


Fig. 107

On peut aussi la représenter comme suit :

0—6	1—6	2—6	3—6	4—6	5—6	6—6
0—5	1—5	2—5	3—5	4—5	5—5	
0—4	1—4	2—4	3—4	4—4		
0—3	1—3	2—3	3—3			
0—2	1—2	2—2				
0—1	1—1					
0—0						

Fig. 108

Dans le Nord de l'Europe on joue avec des jeux comportant un

plus grand nombre de combinaisons. En Russie, les dominos vont jusqu'au double sept, en Angleterre et en Allemagne, jusqu'au double huit, et, en Suède, jusqu'au double neuf ; enfin il a été fabriqué des jeux allant jusqu'au double douze.

En France, où le jeu est très répandu, surtout dans le Midi, on fait exclusivement usage du jeu à 28 dominos.

Les dominos paraissent avoir été connus des anciens Grecs, des Hébreux et des Chinois. L'usage s'en répandit à Paris vers le milieu du XVIIIe siècle.

Quant à l'étymologie du nom, les savants ne sont pas d'accord. On a avancé que ce jeu étant autrefois permis dans les couvents d'Italie, quand un religieux gagnait la partie, il s'écriait en posant son dernier dé : *Domino gratias* (merci, mon Dieu), d'où vint le mot domino.

Voici d'autres opinions non moins fantaisistes :

« Parmi les joueurs de dominos, il y a un proverbe qui attribue l'invention de ce jeu à un abbé qui portait le nom de *Domino*, et qui l'aurait donné à sa merveilleuse découverte ; d'autres prétendent que ce nom vient du nom du camail de chœur des chanoines (noir doublé de blanc), lesquels appelaient ce vêtement du troisième mot du premier psaume des vêpres : *Dixit Dominus domino..*, parce que c'était surtout aux offices du soir que l'on portait cette partie du costume. Quelques-uns affirment que les dés mi-partis noir et blanc rappelaient tellement l'aspect de l'habit des chanoines dans leurs stalles qu'on leur décerna le nom du camail lui-même. Quoi qu'il en soit, ce fut de l'Eglise que sortirent et le nom d'un jeu et le nom d'un costume de bal.

« Le jeu de domino a une allure peu élégante ; la simplicité de son attitude prévient mal en sa faveur, et on éprouve quelque surprise à le trouver si séduisant et si rempli de hautes pensées ; c'est un savant modeste dont on ne soupçonne pas les mérites, au premier aspect, mais qu'on apprend à aimer ensuite. D'insolentes comparaisons ont tenté de le rabaisser jusqu'à la fraternité du jeu

de l'oie, cette niaiserie renouvelée des Grecs, et du loto, cette loterie des portiers.

« Si quelque chose pouvait ajouter à la considération que nous inspire ce jeu, nous trouverions de nouveaux motifs de l'admirer dans la noblesse de ses passions. Il est loin de la cupidité : il aime les petits enjeux ; il joue avec économie ; et, pourtant, c'est le jeu qui soulève les plus fougueuses tempêtes, les altercations les plus vives ; il va jusqu'à la *vendetta*. Son nom est vénitien, son caractère est corse. Il vit surtout par le point d'honneur.

« Le jeu de dominos a vu naître, mourir et renaître tous les jeux ; il vivra autant que le café, et le café vivra autant que Racine... c'est l'immortalité (1). »

Faisons connaître maintenant la propriété numérique caractéristique du jeu.

Si l'on fait la somme de tous les points marqués sur les dés d'un jeu et si on divise cette somme par le nombre des dominos, c'est-à-dire des dés doubles, on obtient la *moyenne* de chaque dé.

Cette moyenne est égale à six dans le jeu ordinaire.

Elle est égale à sept avec le jeu allant jusqu'au double sept.

Elle est égale à huit avec le jeu allant jusqu'au double huit.

. . . .

Nous allons démontrer la proposition pour le jeu ordinaire.

Définissons d'abord ce qu'on appelle *dominos complémentaires*.

Considérons le domino 2-5 et plaçons au-dessous le domino 4-1 ; nous voyons que le nombre de points marqués sur chacun des carrés du premier, ajouté respectivement au nombre des points marqués sur les carrés du second domino, forment une somme égale à 6.

Deux pareils dominos sont dits *complémentaires*.

Ainsi le 3-5 et le 3-1 sont complémentaires, il en est de même du 4-3 et du 2-3.

(1) EUGÈNE BRIFFAUT. — Revue mensuelle *Le Palamède* (15 mars 1843).

Mais il peut arriver qu'un domino soit égal à son complémentaire et il en est ainsi pour les quatre pièces suivantes du jeu :

le 0-6, le 1-5, le 2-4 et le 3-3.

Prenons alors dans un second jeu tous les dés complémentaires des pièces du premier jeu, ce qui nous donne deux jeux complets représentés par 28 couples de dominos complémentaires, c'est-à-dire tels que les points marqués sur les dominos de chaque couple forment le nombre 12.

Le nombre 12 est donc répété autant de fois qu'il y a de couples, soit 28 fois.

Ainsi le nombre des points d'un jeu et du jeu complémentaire, ou ce qui revient au même, le double du nombre des points d'un jeu est égal à 12 fois le nombre des dominos.

Par suite, le nombre des points d'un seul jeu vaut 6 fois le nombre des dominos, et la moyenne est bien égale à 6.

Cette moyenne ne change pas évidemment lorsque l'on enlève un dé dont la somme des points vaut six, ou deux dés complémentaires. La moyenne est donc encore égale à six si l'on ne tient pas compte des doubles.

D'une manière générale, si l'on suppose qu'un jeu se termine au double-n, le nombre des dominos est égal à

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

et le nombre total des points est égal à

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ce nombre n'est jamais égal au carré d'un nombre entier.

Cette proposition se démontre rapidement comme suit :

En posant $n+1=p$, l'expression précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{(p-1)p(p+1)}{2}=\frac{p(p^2-1)}{2}$$

Or, p et p^2-1 étant deux nombres premiers entre eux, le pro-

duit $p(p^2 - 1)$ ne peut être un carré parfait que si chacun des facteurs p et $p^2 - 1$ est lui-même carré parfait.

Mais, on ne peut avoir $p^2 - 1 = q^2$, puisque la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit, plus un, c'est-à-dire à au moins 3 unités.

On ne peut pas avoir non plus

$$p(p^2 - 1) = 2N^2$$

car, d'après ce qui précède, il en résulterait

$$p^2 - 1 = 2, \text{ d'où } p^2 = 3$$

et 3 n'est pas un carré.

Nous ne nous arrêterons pas au vocabulaire et aux règles du jeu que l'on trouve dans tous les traités spéciaux, nous nous contenterons d'en exposer sommairement la marche.

Le jeu de dominos se joue de plusieurs façons différentes, d'après les pays et les localités, mais on peut les ramener à deux types principaux, la partie en *tête-à-tête* et le *domino voleur*. La distribution des dominos se fait toujours de la même manière ; on les retourne à l'envers de façon que les points soient cachés ; on les mêle avec la main et chaque joueur en prend un pour savoir qui aura l'avantage de la pose ; ce droit est acquis au plus fort numéro. Ensuite on remêle les dominos et chaque joueur en prend un nombre égal qu'il range devant lui ou tient dans sa main de façon à cacher ses points à l'adversaire. Les dominos restants forment la réserve ou le talon.

Partie en tête-à-tête. — Les joueurs sont, en général, deux : chacun prend sept dominos et il en reste 14 au talon. Celui qui a la pose met sur la table le dé dont il lui convient de se débarrasser, en général le plus fort.

Le second joueur pose à son tour à côté du premier dé un domino qui doit porter sur une des moitiés de la face supérieure un nombre égal à celui qui est formé par les points sur une des moitiés du premier dé. Le jeu se continue tant que les joueurs ont des

dés qui se correspondent ainsi. Si l'un d'eux vient à ne plus en avoir, il *boude*, c'est-à-dire cesse de jouer pendant que l'autre continue à placer ses dominos, jusqu'au moment où il retrouve l'occasion de placer un des siens. La partie est gagnée par le joueur qui le premier fait domino, c'est-à-dire s'est débarrassé de tous ses dés. Mais, parfois, les dés sortis ne permettent pas d'aller jusqu'au bout, si aucun joueur n'a le numéro correspondant du dernier dé posé à chaque extrémité. Dans ce cas, les joueurs abattent le jeu et celui qui a le plus grand nombre de points a perdu. En général, on joue en un certain nombre de points, cent cinquante par exemple, et le gagnant de chaque partie compte autant de points qu'il y en a dans les dominos non placés de son adversaire.

Dans la partie en tête-à-tête on peut prendre plus ou moins de sept dés, selon les conventions. Pour gagner, il s'agit de faire le premier le nombre de points convenus et on doit tâcher d'avoir en mains les plus faibles numéros quand le jeu se ferme. On peut encore jouer en *pêchant* au lieu de bouder : quand un joueur n'a plus aucun domino qu'il puisse placer, il doit puiser dans la réserve jusqu'à ce qu'il en trouve un bon; les joueurs peuvent convenir que l'on ne puisera que deux dés. On peut jouer à trois ou quatre chacun pour soi de la même manière; dans la partie dite de la *poule*, chacun met un certain enjeu et le premier qui fait cent points le gagne.

Le *domino voleur* se joue à quatre, deux joueurs associés contre les deux autres. Chaque joueur prend six dés et il en reste quatre au talon. Après la pose du premier dé le joueur placé à la droite du premier continue la pose et ainsi de suite. Si un joueur boude, c'est son voisin de droite qui continue. Celui qui le premier fait domino compte pour lui et son partenaire autant de points qu'il en reste dans les deux jeux de leurs adversaires ; si le jeu est fermé, les partenaires qui ont le moins de points dans leur jeu que l'on abat comptent pour eux les points réunis des adversaires. Si les points sont égaux, la partie est nulle et la main suit à droite. On joue ordinairement en cent points. La partie est *simple* si les points sont

marqués alternativement par les deux camps ; elle est dite *petite bredouille* si un camp atteint cent points sans interruption, les adversaires ayant déjà compté ; et *grande bredouille* si un seul camp marque à la file tous les points. On paye double dans le second cas, triple dans le troisième.

La chance est importante aux dominos : mais la mémoire et l'attention sont indispensables pour bien jouer.

Le domino à qui perd gagne. — Une partie fort intéressante consiste, en suivant les règles ordinaires du jeu, à chercher à conserver en main le plus grand nombre de points et pour cette raison on la désigne sous le nom *à qui perd gagne*.

A ce jeu, le coup est arrêté quand l'un quelconque des joueurs ferme ou fait domino. Alors, chaque camp compte ses points ; le gagnant est celui qui en a le plus grand nombre et il marque à son actif le total de ses points.

La partie à qui perd gagne peut se jouer à deux, à trois ou à quatre.

Les coups maxima. — Dans la partie de domino à quatre chacun pour soi, si les joueurs prenaient chacun sept dés, et s'il n'y avait plus, par conséquent, de talon, il pourrait se présenter plusieurs dispositions curieuses dans lesquelles le premier joueur gagnerait nécessairement la partie, pendant que le deuxième et le troisième joueur ne pourraient poser un seul dé.

Considérons, par exemple, les quatre joueurs A, B, C, D et donnons au premier A, les quatre premiers blancs et les trois derniers as, c'est-à-dire les dominos

00, 01, 02, 03, 14, 15, 16,

au quatrième D, les trois autres blancs, les trois autres as et un domino quelconque, c'est-à-dire les pièces

04, 05, 06, 11, 12, 12 et un domino.

Les joueurs B et C se partagent les dominos qui restent.

Dans ce cas, A gagne nécessairement la partie après la pose des

treize dominos désignés ci-dessus, tandis que B et C n'ont pu poser aucun des dés qu'ils possèdent.

Le nombre total des points de ces 13 dés étant égal à 48, le premier joueur gagne donc 120 points en un seul coup ; c'est le *coup maximum*.

La partie se résume ainsi :

A pose le double blanc ; B et C boudent et bouderont chaque fois, car A s'arrange toujours de manière à placer du blanc ou de l'as aux extrémités du tableau ; D peut poser l'un des trois blancs qu'il possède 04, 05, 06. Le premier joueur, A, posera l'as correspondant 41, 51, 61. Puis si D pose le 11, le 12 ou le 1-3, A répondra par 10, 20 ou 3-0 et finira toujours par poser tous ses dés.

En échangeant le blanc ou l'as avec l'un quelconque des points 2, 3, 4, 5, 6, on obtiendrait d'autres parties semblables à la précédente. Le nombre de ces parties est donc égal au nombre des combinaisons simples de 7 objets pris 2 à 2, c'est-à-dire à 21. Mais il faut ajouter que la probabilité de la rencontre d'une telle partie dans le tirage au sort des dés est extrêmement petite.

Nous ferons une observation du même genre au sujet du coup maximum de 106 points que deux associés peuvent atteindre au domino voleur. Ce coup fourni par les 12 plus gros dés, peut se présenter de la façon suivante :

Le joueur A possède trois blancs et les autres blancs restent au talon. Les trois blancs en main sont 0-0, 0-1 et 0-2.

Le deuxième joueur B ne possède pas d'as et le quatrième D n'a pas de deux. Voici la notation du coup :

A	B	C	D	A	B	C	D	A
0-0.	boude.	boude.	boude.	0-1.	boude.	1-2.	boude.	2-0

et le jeu se trouve fermé.

On compte et les joueurs B et D se trouvent posséder les 12 plus gros dés.

Dans la partie à deux personnes, le coup maximum de 69 points

peut se produire, quand l'un des joueurs compte avec ses 7 dés et que ceux-ci sont les plus gros de tous.

Le matador. — On désigne sous le nom de matador une façon particulière de jouer reposant sur ce principe qu'un domino étant posé, il faut que le dé suivant complète le nombre de sept points, au moyen de sa moitié avancée à côté de la moitié du dé précédent.

Si, par exemple, le premier joueur pose le 4-5, il faut que le joueur suivant avance soit un 2 (à droite), soit un 3 (à gauche), de manière que les points marqués sur les deux moitiés en contact donnent le nombre 7.

Ce nombre s'obtient facilement avec les dominos marqués ; mais il y a les blancs, avec lesquels aucun dé ne pourrait former sept, si l'on n'avait admis que, pour ne pas fermer le jeu, il y aurait quatre *matadors* ayant la propriété de le rouvrir et de faire passer les blancs.

Pour le jeu ordinaire de 28 dés, les quatre matadors sont le 6-1, le 5-2, le 4-3 et le double-blanc.

Si l'on admet qu'après un blanc, on puisse jouer un matador, et qu'après ce dernier on puisse avancer un blanc, les 28 dés possèdent la propriété de former un cercle ininterrompu de dés. Pour

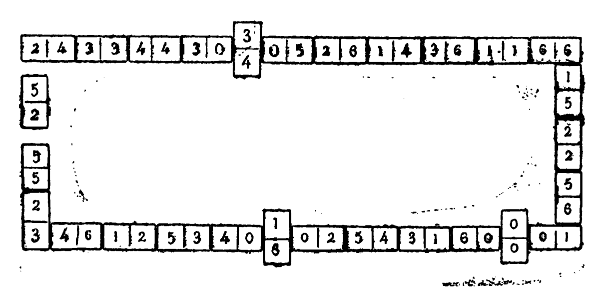


Fig. 109

donner un exemple, posons un dé quelconque, pris au hasard, le 3-6 par exemple, et nous arriverons forcément au cercle suivant ou à tout autre qui lui sera équivalent,

On parviendra toujours à un résultat analogue, en ayant soin de réserver le matador qui porte le point par lequel commence la série. Dans le cercle ci-dessus, le point 2, se trouvant le premier, nous avons réservé le matador 2-5, qui a été ensuite posé sans qu'il empêchât le cercle d'être fermé ; si on avait commencé par un blanc, nous aurions réservé le double blanc, etc. Le cercle peut être coupé n'importe où et rester fermé si l'on porte le matador convenable au point de coupure.

Cette propriété des dominos cesse d'exister si l'on n'admet la pose d'un blanc après un matador que lorsque ce matador est le double blanc.

Dans ce cas, il reste toujours un blanc, après lequel le jeu est fermé. En jouant convenablement, il est possible d'arriver à poser presque tous les jetons, si l'on a soin de réserver un blanc pour la fin ; mais le cercle des nombres *sept* n'est pas complet.

Les règles du jeu sont les suivantes :

Chaque joueur tire un domino, et la pose appartient à celui qui a le point le plus élevé. Il mêle et prend 3 dés, quand les autres se sont servis.

Il pose un domino et chacun doit couvrir en formant sept points, comme nous venons de l'expliquer. Quand un joueur ne peut fournir le point convenable, il peut jouer un matador s'il en possède dans son jeu ; s'il n'en possède pas, il pêche jusqu'à ce qu'il ait puisé dans le talon un domino lui fournissant le point, ou un matador.

On peut donc placer le matador où l'on veut. On ne peut couvrir un matador par un blanc (sauf quand il s'agit du double blanc) ; on doit le couvrir en complétant le nombre 7 avec les points de l'une de ses moitiés. Quelquefois on donne plus de valeur au matador en convenant que celui qui l'avance, au lieu de le poser verticalement, le posera dans le sens qu'il voudra, et que le joueur suivant sera forcé de couvrir sur le bout resté libre.

La possession d'un matador est indispensable pour ouvrir le jeu fermé par un blanc.

Le droit de jouer un matador n'est pas limité ; on peut même couvrir un matador par un autre, et on a le droit de conserver un matador pour ne pas rouvrir le jeu si l'on estime qu'il y a avantage à le laisser fermé.

On joue ordinairement le matador à deux ; mais trois ou quatre joueurs peuvent y prendre part. On peut convenir que le vainqueur sera celui qui fera le premier domino ou qui aura le moins de points quand le jeu sera fermé ; ou bien encore on joue en 100 ou 150 points.

Pour tout le reste, les règles, les fautes et les pénalités sont les mêmes que dans le jeu ordinaire.

A moins de convention contraire, on joue des deux côtés du jeu ; quelquefois cependant on préfère ne jouer que d'un seul côté, soit de droite à gauche, soit de gauche à droite.

Voici quelques remarques utiles :

Puisqu'il est impossible de poser contre un blanc autre chose qu'un matador, on doit s'efforcer de faire jouer l'adversaire sur les blancs pour diminuer ses chances de posséder ensuite des matadors.

Quand on suppose, par la marche du jeu, que l'adversaire possède des blancs, on s'efforce, aussi longtemps que possible, de l'empêcher de les poser.

On ne pose soi-même de blanc que lorsqu'on possède un matador.

On joue quelquefois le matador avec un jeu de 55 dominos, dont le double neuf est le plus élevé ; le double sept forme alors un cinquième matador, sur lequel l'adversaire doit en jouer un autre.

Cinq partout ou muggins. — Cette variante du jeu est très répandue en Angleterre ; elle exige beaucoup de pratique et de calcul.

Deux, trois ou quatre joueurs peuvent y prendre part en même temps et prennent le même nombre de dominos, pourvu qu'il en reste au moins deux au talon et que chaque joueur n'en ait jamais plus de sept.

Les dominos se mêlent et se servent comme dans les autres jeux.

Le principe du muggins est de poser les dominos de façon que les deux extrémités libres du jeu forment un total de 5 points ou d'un multiple de cinq.

Les doubles se posent transversalement, et cette position, facultative dans la plupart des autres parties, est ici absolument obligatoire pour des raisons que l'on comprendra par ce qui suit :

Chaque cinq ou multiple de cinq que l'on forme en posant un domino, par le total des points marqués sur les extrémités libres du tableau, vaut un point à celui qui vient de jouer.

Chaque joueur doit avoir à son tour le droit de jouer le premier, en allant de droite à gauche dans chaque partie.

Le vainqueur est celui qui atteint le 1er le nombre de 31 points.

Donnons un exemple.

Le premier joueur, par exemple, avance le double cinq et marque 2 points. Ce domino est le meilleur qu'un joueur puisse posséder quand il est le premier à jouer : il produit 2 points et empêche de compter le joueur suivant, si celui-ci n'a pas le cinq blanc.

Supposons que le deuxième joueur ne puisse jouer que le 5-6, les deux extrémités libres du jeu formeront un total de $10 + 6 = 16$. Donc rien à marquer.

Le domino suivant étant un 5-4 posé du côté du double cinq, le joueur qui l'a posé comptera 2 points, puisque les extrémités libres donnent $6 + 4 = 10 = 5 \times 2$.

Le joueur suivant n'a pas de 4 et se voit forcé de poser le double six (transversalement) ; il n'a donc rien à compter attendu que les extrémités donnent $6 \times 2 + 4 = 16$.

Mais celui qui vient après lui a le double quatre ; il le pose transversalement, ce qui fait 8 points à un bout et 12 à l'autre, soit 20 points. Le joueur marque 4 points et c'est le plus grand nombre de points qu'il est possible de faire en un seul coup.

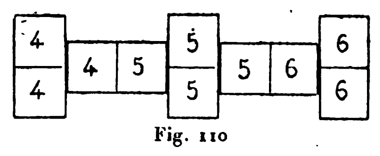


Fig. 110

La figure ci-dessus donne la disposition de la partie.

On continue ainsi jusqu'à épuisement des dominos.

Tout dé produisant un ou plusieurs points doit être appelé à haute voix par le joueur.

Trois partout. — C'est une modification du muggins. Il faut, pour gagner un ou plusieurs points, que le total des points des extrémités libres soit 3 ou un multiple de 3.

Pour gagner la partie, il faut arriver à 50 points. On peut marquer 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 points à la fois, suivant que les extrémités forment un total de 3, 6, 9, 12, 15 ou 18.

Le 3 peut être obtenu quand il y a double as à un bout et as à l'autre, ou quand on a blanc à une extrémité et 3 à l'autre. Le point le plus élevé que l'on puisse marquer d'un seul coup est 6, que l'on obtient avec un double six à un bout et six ou double trois à l'autre.

Dispositions rectilignes des dés d'un jeu ordinaire. — Considérons une disposition rectiligne quelconque des dés d'un jeu. D'après la règle, deux dés consécutifs doivent se toucher par des points équivalents. On voit alors facilement que l'élément final est le même que l'élément initial, c'est-à-dire que si le tableau commence, par exemple, par un 4, il se terminera nécessairement par un 4, à la condition d'employer tous les dominos.

Observant, en effet, que si on enlève tous les doubles d'une combinaison rectiligne quelconque, et si on rapproche les pièces restantes de manière à rétablir la continuité de la chaîne, on obtient encore une combinaison rectiligne remplissant les conditions du jeu. Chaque point étant inscrit sur 6 dominos, le point initial doit se rencontrer encore en cinq autres endroits de la combinaison rectiligne. Mais dans l'intérieur de celle-ci, chaque point se présente deux fois de suite : d'abord comme seconde moitié d'un dé, puis comme première moitié du dé suivant. Il résulte de là que l'élément initial,ne pouvant figurer qu'un nombre pair de fois dans l'intérieur de la combinaison, ne s'y rencontrera que 4 fois, et devra

nécessairement se trouver à un endroit où il ne sera pas suivi d'un point égal, c'est-à-dire à l'autre extrémité de la combinaison.

Cette démonstration s'applique à tous les jeux de dominos qui se terminent par un double *pair* (double quatre, double six, double huit, etc.).

Lorsque le jeu se termine à un double *impair* (double trois, double cinq, double sept, etc.) il n'est plus possible de former des dispositions rectilignes suivant les règles du jeu en employant tous les dés.

Remarquons, en effet, que dans un jeu de dominos composé de toutes les combinaisons complètes des points de o à $(2n - 1)$, chacun des points, à l'*exclusion des doubles*, se trouve répété $(2n - 1)$ fois. Dès lors, aussitôt qu'un point différent du point initial aura été répété $(2n - 1)$ fois, il sera impossible de placer un nouveau domino, puisqu'il n'y aura plus de domino contenant ce point. Quant au point initial, il pourra être répété $(2n - 1)$ fois sans fermer le jeu. Il résulte de là que le nombre maximum de points que l'on peut placer d'après les règles du jeu, à l'exclusion des doubles, comprendra : 1° les 2 points extrêmes, répétés $(2n - 1)$ fois ; 2° les autres points, en nombre $(2n - 2)$, répétés $(2n - 2)$ fois. Ce nombre maximum sera donc

$$2(2n - 1) + (2n - 2)^2;$$

le nombre maximum des dominos composant la disposition rectiligne est la moitié du précédent, ou

$$2n^2 - 2n + 1.$$

Le nombre total des dominos étant, sans les doubles, égal à $n(2n - 1)$, il reste toujours un *talon* contenant au moins $(n - 1)$ dominos.

Il n'y a d'exception que pour $n = 1$, c'est-à dire dans le cas où la disposition rectiligne ne comprend qne le seul domino blanc-as [1].

[1] Cette démonstration est de DELANNOY. Voir LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome II, p. 65.

Il résulte de tout ce qui vient d'être dit que si on retire d'un jeu ordinaire (ou plus généralement d'un jeu qui se termine à un double pair) un dé quelconque qui ne soit pas un double, le 3-4 par exemple, les diverses dispositions rectilignes qu'il est possible de former avec les autres dés en partant d'un domino quelconque et en appliquant la règle du jeu pour la pose successive des dés, seront terminées à l'une des extrémités par un 3 et à l'autre par un 4.

On peut mettre à profit cette propriété pour exécuter une récréation qui excite généralement l'étonnement des personnes qui la voient pour la première fois.

On dispose sur une table tous les dominos retournés, on les mêle et en exécutant cette opération, on en subtilise un adroitement. On le regarde en cachette, en s'assurant que c'est un dé composé, soit le 3-4. On invite alors une personne de la société à tirer un dé au hasard et à l'abattre face découverte. On paraît alors s'absorber mentalement dans de longs calculs à la suite desquels on prie la personne de placer tous les dominos en partant de celui déjà posé et en suivant les règles du jeu, de la façon qu'elle voudra, en lui annonçant à l'avance que la chaîne se terminera d'un côté par un 3 et de l'autre par un 4.

Le tour exécuté, on peut recommencer l'opération, en remettant le 3-4 dans le jeu et en enlevant un autre domino.

Nombre des dispositions rectilignes. — Nous avons vu qu'en rangeant les pièces d'un jeu de dominos ordinaire les unes à la suite des autres d'après la règle du jeu, on formait ce que nous avons appelé une disposition rectiligne dans laquelle l'élément final est nécessairement le même que l'élément initial.

On peut se proposer de déterminer le nombre des dispositions rectilignes qu'il est ainsi possible de réaliser avec un jeu ordinaire.

La question a été posée sous forme de problème dans le tome VIII des *Nouvelles annales de mathématiques* (p. 74) et résolue par le

Dr Reiss, de Francfort dans un mémoire (1) in-4° de 58 pages, inséré après sa mort dans le tome V des *Annali di matematica pura ed applicata* (p. 63-120, Milan, 1871).

Reiss, dont la méthode est fort longue, considère les combinaisons *circulaires*. On comprend aisément qu'on peut les obtenir en partant d'une disposition rectiligne quelconque que l'on replie sur elle-même de manière à amener en contact les moitiés extérieures des deux dés placés aux extrémités.

Dans ces combinaisons circulaires, tous les points se présentent deux fois de suite, à trois reprises différentes. Chaque dé peut être regardé comme dé initial. Mais on doit tenir compte du sens dans lequel les dominos se succèdent, c'est-à-dire aller de droite à gauche ou de gauche à droite.

Une combinaison circulaire quelconque étant formée après avoir enlevé les doubles du jeu, chacun de ces doubles peut y être intercalé à trois places différentes.

Si donc nous désignons par C le nombre des combinaisons circulaires distinctes ne contenant aucun double, l'addition d'un premier double, du double trois par exemple, aux trois places qu'il peut prendre, donnera 3 fois plus de combinaisons distinctes ou 3 C. L'adjonction d'un nouveau double triplera le nombre précédent.

Par conséquent on obtiendra le nombre des combinaisons circulaires avec doubles en triplant 7 fois de suite le nombre des combinaisons circulaires C formées en excluant les doubles ; ce nombre est donc

$$3^7 . C = 243 . C.$$

Partons maintenant de l'une quelconque des combinaisons circulaires des 28 dominos ; en prenant successivement comme dé initial chacun des 28 dés qu'elle contient, il en résultera 28 combi-

(1) *Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu de domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.*

naisons rectilignes distinctes. On conclut de là que le nombre total de ces dernières est égal à

$$28 \cdot 3^7 \cdot C.$$

La question est donc ramenée au calcul de C.

Reiss a trouvé que le nombre C des combinaisons circulaires était égal à

$$129\,976\,320$$

il en résulte que l'on a pour le nombre des combinaisons rectilignes

$$\frac{1}{2} \cdot 129\,976\,320 \times 28 \times 3^7 = 3\,979\,614\,965\,760$$

et l'on doit doubler ces deux nombres si l'on ne tient pas compte du sens.

Au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des sciences*, tenu à Nancy en 1886, G. Tarry a exposé, dans un mémoire des plus intéressants, une méthode ingénieuse fournissant rapidement les résultats auxquels était arrivé Reiss, mais avant de faire connaître cette méthode, nous croyons devoir dire quelques mots de celle donnée par Lucas pour un jeu allant jusqu'au double quatre [1].

Lucas ne passe pas par les dispositions circulaires et comme Reiss il supprime les cinq doubles 0-0, 1-1, 2-2, 3-3 et 4-4.

Il considère, de plus, comme distinctes deux combinaisons rectilignes qui ne diffèrent que par l'ordre de succession des dés, en les disposant soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. En écrivant, dans le sens ordinaire de gauche à droite, les points des dominos d'une disposition rectiligne, chaque point se trouve répété deux fois consécutivement, à l'exception du premier et du dernier; pour simplifier, on n'écrit qu'une fois deux points consécutifs, et on supprime le dernier point égal au premier. Il en résulte que la *notation* d'une disposition rectiligne est constituée par une suite de

(1) Lucas. — *Récréations mathématiques*, tome II, p. 68-71.

dix chiffres contenant deux fois chacun des chiffres 0,1,2,3,4 ; de plus, le voisinage de deux chiffres quelconques tels que 1 et 3 devra se présenter une fois et une seule, en considérant comme voisins le premier et le dernier chiffres.

Ainsi, par exemple la notation

0120314234

représente une disposition rectiligne formée successivement par les dominos blanc-as, as-deux, deux-blanc,... trois-quatre, quatre-blanc.

On comprend que, partant d'une disposition rectiligne, il est possible d'en déduire un certain nombre d'autres en permutant d'une manière quelconque les points 0,1.2,3,4 ; mais les dispositions obtenues ainsi ne seront pas toujours distinctes.

Il y a donc lieu de rechercher les solutions *élémentaires*, c'est-à-dire les solutions qui permettent d'obtenir toutes les autres par permutation des éléments 0,1,2,3,4. Par un numérotage de convention, on peut toujours désigner par 0, le premier point, par 1 le suivant, de telle sorte que le premier domino sera 01. Le point suivant sera désigné par 2, et les trois premiers chiffres de la solution élémentaire sont nécessairement 012.

Le quatrième point peut être égal au premier, ou représenter un point nouveau que nous désignerons par 3 ; en continuant cette discussion, on trouve assez facilement les *vingt-deux* notations suivantes, rangées dans l'ordre numérique,

I	0120314234	XII	0123140342
II	0120314324	XIII	0123142034
III	0120324134	XIV	0123142043
IV	0120324314	XV	0123143024
V	0120341324	XVI	0123143042
VI	0120342314	XVII	0123402413
VII	0123024134	XVIII	0123403142
VIII	0123024314	XIX	0123413024
IX	0123041342	XX	0123413042
X	0123043142	XXI	0123420314
XI	0123140243	XXII	0123420413

Si l'on renverse l'ordre des chiffres de l'une quelconque de ces notations, en donnant aux points le numérotage de convention indiqué, on retombe nécessairement sur l'une de ces notations : mais deux cas sont à distinguer. Dans le premier cas, la notation retournée et numérotée reproduit la même notation ; la solution est alors dite *symétrique*. Dans le second cas, on en reproduit un autre qui est appelée *dissymétrique*.

Les notations symétriques sont au nombre de *six*, savoir :

I, IV, XI, XVI, XX et XXII ;

les notations dissymétriques de rangs

II, V, VI, IX, X, XII, XVII et XVIII.

ont respectivement pour inverses

III, VII, VIII, XIII, XV, XIV, XXI et XIX.

Pour déterminer le nombre des combinaisons rectilignes distinctes, sans tenir compte des doubles, remarquons que le nombre des permutations de cinq objets est égal à

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \quad \text{ou} \quad 120;$$

toute notation symétrique donne 60 dispositions distinctes ; toute notation dissymétrique et son inverse donne 120 dispositions ; on a donc au total

$$\left(\frac{6}{2} + 8\right)120 \quad \text{ou} \quad 1\,320$$

dispositions rectilignes, abstraction faite des doubles.

En tenant compte des doubles, on voit que l'un quelconque d'entre eux peut occuper 3 places différentes suivant la disposition rectiligne considérée et que les 4 autres ne peuvent occuper que 2 places.

Par suite, le nombre total des dispositions rectilignes du jeu de dominos terminé au double quatre est

$$1\,320 \times 3 \times 2^4 = 2^7 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 11 = 63\,360.$$

Méthode de Tarry. — La méthode ingénieuse de Tarry repose sur cette remarque de Laisant.

Si l'on supprime les doubles du jeu de dominos ordinaire, il reste 21 dés que l'on peut figurer de la manière suivante. Traçons un heptagone convexe et l'ensemble de ses diagonales, ou si l'on aime mieux, marquons sur un plan sept points numérotés 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et joignons-les deux à deux de toutes les manières possibles.

La ligne 1-3 peut être considérée comme représentant l'as-trois, la ligne 2-4 représentera le dé 2-4, la ligne 0-5 représentera le dé blanc-quatre, et ainsi de suite. Par conséquent, le problème consistant à disposer en rond les 21 dés du jeu de dominos, sans les doubles, revient à décrire d'un seul trait continu la figure ci-contre, en passant sur toutes les lignes une seule fois, sans faire sauter la plume ou le crayon, et sans fragmenter les diagonales, Mais, puisque chaque double peut occuper *trois* places dans une disposition circulaire, et qu'il y a *sept* doubles, on multipliera le résultat obtenu par $3^7 = 2\,187$ pour avoir les dispositions circulaires des 28 dominos.

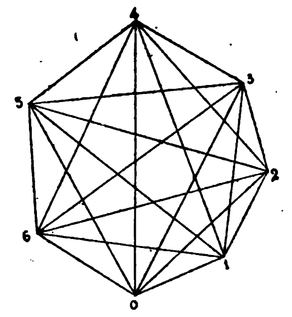


Fig. 111

Ce dernier résultat devra être multiplié par 28 pour obtenir le nombre des dispositions rectilignes.

Cela posé, Tarry considère comme un labyrinthe le réseau géométrique constitué par les côtés d'un polygone et ses diagonales.

Il appelle labyrinthe rentrant un labyrinthe tel qu'à chaque point de son parcours aboutisse toujours un nombre pair d'allées.

Les points du parcours auxquels aboutissent plus de deux allées sont les carrefours du labyrinthe et il désigne spécialement sous le nom d'impasse toute allée dont les extrémités aboutissent à un même carrefour.

Puis il établit les deux théorèmes suivants :

Théorème des impasses. — *Si dans un labyrinthe rentrant on supprime une impasse, le nombre de parcours distincts du labyrinthe ainsi réduit, multiplié par le nombre de ses allées qui aboutissent au carrefour situé sur l'impasse supprimée, est égal au nombre de parcours distincts du labyrinthe primitif. On aura bien soin de compter par deux allées chacune des autres impasses qui pourraient être annexées à ce carrefour.*

Désignons par N le nombre de parcours distincts du labyrinthe réduit et par $2n$ le nombre de ses allées aboutissant au carrefour situé sur l'impasse supprimée.

Je dis que le nombre de parcours distincts du labyrinthe primitif est égal à $N \times 2n$.

En effet, considérons l'un quelconque des N parcours distincts du labyrinthe réduit.

Dans ce parcours on passera n fois par le carrefour de l'impasse supprimée, et à l'un quelconque de ces n passages, l'on peut interrompre le parcours en arrivant au carrefour de l'impasse, parcourir entièrement cette impasse, ce qui peut se faire dans deux sens différents, et revenu au carrefour, achever le parcours commencé.

Il résulte de là que chacun des N parcours distincts du labyrinthe réduit fournira $2n$ parcours distincts du labyrinthe primitif.

Les N parcours distincts du labyrinthe réduit fourniront ainsi $N \times 2n$ parcours du labyrinthe primitif.

Il est évident que ces $N \times 2n$ parcours du labyrinthe primitif sont tous distincts, et qu'il n'existe pas d'autres manières de parcourir en une seule course le labyrinthe primitif.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Si à un carrefour aboutissent $2(h + k)$ allées,

dont $2k$ appartiennent à k impasses, le nombre de parcours distincts du labyrinthe proposé est égal au produit de

$$n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)\,2^k$$

par le nombre de parcours distincts du labyrinthe réduit obtenu par la suppression des k impasses du labyrinthe proposé.

En effet, ajouter successivement chacune de ces k impasses au labyrinthe réduit revient à multiplier successivement les nombres de parcours distincts par

$$2n,\ 2(n+1),\quad 2(n+2),\ \dots,\quad 2(n+k-1).$$

On voit ainsi que le théorème des impasses permet d'éliminer les impasses du labyrinthe proposé et de ramener le calcul du nombre de parcours distincts au cas où le labyrinthe ne possède plus d'impasses.

Théorème des carrefours. Etant donné un labyrinthe rentrant sans impasses et comprenant k carrefours, si l'on désigne par $2n$ *le nombre d'allées aboutissant à l'un de ses carrefours, N, le nombre de parcours distincts du labyrinthe proposé est égal à la somme des nombres de parcours distincts de* $1\times3\times5\times7\times\dots\times(2n-1)$ *labyrinthes rentrants ne comprenant plus que* $k-1$ *carrefours.*

Ces $1\times3\times5\times7\times\dots\times(2n-1)$ *labyrinthes nouveaux s'obtiennent en groupant en* n *couples de deux allées, de toutes les manières possibles, les* $2n$ *allées aboutissant au carrefour N, et en remplaçant ensuite, dans chacun de ces groupements, chaque couple de deux allées par une allée nouvelle joignant les deux carrefours où aboutissent les extrémités de ce couple d'allées ou, dans le cas particulier où les deux allées du couple aboutissent à un même carrefour, par une impasse passant par ce carrefour.*

Groupons les $2n$ allées du carrefour N par couples de deux allées de toutes les manières possibles.

Nous obtenons ainsi $(2n-1)(2n-3)\dots5.3.1$ groupements différents.

A chacun de ces groupements faisons correspondre tous les par-

cours du labyrinthe proposé dans lesquels, à chaque passage par le carrefour N, l'allée qui y conduit et l'allée qui en éloigne appartiennent à un couple du groupement considéré.

Il est aisé de voir que le nombre de parcours cherché sera égal à la somme des nombres de parcours distincts correspondant à chaque groupement, de la manière qui vient d'être indiquée.

Ceci admis, considérons les parcours de l'un de ces groupements, et examinons les n couples de deux allées qui le composent.

Dans chacun de ces n couples, les deux allées, considérées comme issues du carrefour N, aboutissent soit à deux carrefours différents A, B, soit à un même carrefour C.

Dans le premier cas, nous pouvons évidemment remplacer les deux allées NA, NB, par une allée nouvelle AB, reliant les carrefours A et B, sans changer le nombre de parcours, car cela revient à remplacer les trajets ANB ou BNA par les trajets équivalents AB ou BA.

Dans le second cas, on voit aussi clairement que les deux allées reliant les deux carrefours N et C peuvent être remplacées par une impasse passant par le carrefour C.

Le théorème est donc démontré complètement.

En appliquant aux nouveaux labyrinthes la méthode d'élimination d'impasses et de réduction du nombre de carrefours, nous arrivons forcément, par réductions successives, à n'avoir plus à considérer que des labyrinthes sans impasses ne comprenant plus que deux carrefours, et le problème pourra être résolu.

On démontre, en effet, avec la plus grande facilité, que le nombre de parcours distincts d'un labyrinthe ne comprenant que deux carrefours reliés par $2n$ allées est égal à

$$2(2n-1)(2n-2)\ldots 4\times 3\times 2\times 1,$$

en tenant compte du sens du parcours.

Remarque. — Un labyrinthe qui n'a que deux points impairs peut aussi être parcouru entièrement en une seule course en ne passant qu'une fois par chaque allée.

On voit aisément que le nombre de parcours distincts de ce labyrinthe est le même que celui du labyrinthe rentrant que l'on obtiendrait en ajoutant une allée nouvelle reliant les deux points impairs (1).

Appliquons ces propositions au cas déjà examiné par Lucas, c'est-à-dire au jeu de dominos allant jusqu'au double-quatre.

Considérons le réseau géométrique o 1 2 3 4 formé par un pantagone et ses diagonales.

Au carrefour *o* aboutissent 4 chemins *a*, *b*, *c*, *d*, que l'on peut

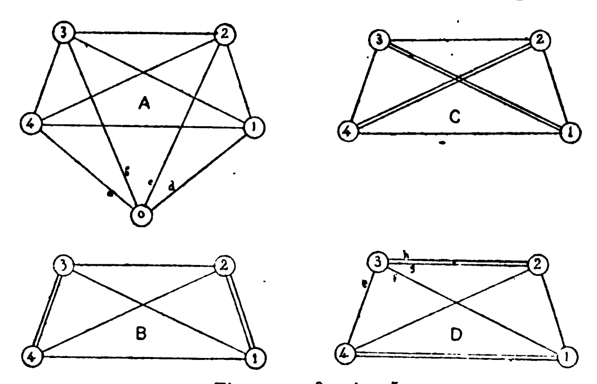


Fig. 112-113-114-115

souder ensemble deux à deux, de toutes les manières possibles.

a et *b* d'une part avec *c* et *d* d'autre part, donnent B.
a et *c* — avec *b* et *d* — C.
a et *d* — avec *b* et *c* — D.

Le carrefour *o* se trouve aussi supprimé, et le nombre des parcours de la figure A est égal à la somme des nombres de parcours des trois figures B, C, D.

$$A = B + C + D.$$

(1) *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1886. Séance du 13 août. — Tarry : *Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en passant qu'une seule fois par chacune des allées.*

Considérons l'un quelconque de ces nouveaux labyrinthes, le labyrinthe D par exemple, et supprimons le carrefour marqué 3. Ceci peut se faire de trois manières.

La soudure de *e* et *g* d'une part avec *f* et *h* de l'autre, donne E
La soudure de *e* et *h* — avec *f* et *g* — la même figure E,

Enfin la soudure *e* et *f* et la transformation des deux allées *g*, *h* en une impasse nous donnent le labyrinthe F.

Donc

$$D = 2E + F.$$

En opérant sur les réseaux B et C on arrive à des décompositions identiques, on en conclut que les trois labyrinthes B, C, D sont équivalents et on peut poser.

$$A = 3D = 3(2E + F).$$

Considérons maintenant le réseau E et supprimons le carrefour 2.

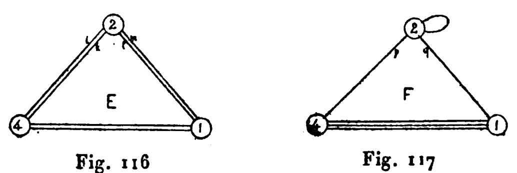


Fig. 116 Fig. 117

Ceci peut encore se faire de trois manières,

En soudant *i* et *l* d'une part, *k* et *m* de l'autre
Ou *i* et *m* — *k* et *l* —

on obtient deux fois le labyrinthe G,

En transformant les deux allées *i*, *k* en une impasse aboutissant



Fig. 118 Fig. 119

au carrefour 4, et les deux allées *l*, *m* en une seconde impasse, on obtient la figure H.

Donc

$$E = 2G + H.$$

D'autre part dans le labyrinthe F on peut supprimer l'impasse du carrefour 2 et souder les deux allées p, q, ce qui nous fournit encore le réseau G.

Ceci posé, le réseau G nous donne $2 \times 3 \times 2 = 12$ parcours si l'on tient compte du sens et 6 parcours si l'on ne tient pas compte du sens.

Donc le nombre des parcours pour F sera $12 \times 2 = 24$ en tenant compte du sens et $6 \times 2 = 12$ si l'on ne tient pas compte du sens.

Le nombre des parcours du labyrinthe H sans les impasses est de 2 en tenant compte du sens, ou de 1 sans tenir compte du sens.

Le nombre des parcours de ce même labyrinthe avec les impasses est donc de $2 \times 2 \times 2 = 8$ en tenant compte du sens ou de $1 \times 2 \times 2 = 4$ sans tenir compte du sens.

On a alors $E = 12 \times 2 + 8 = 32$ en tenant compte du sens ou $E = 6 \times 2 + 4 = 16$ sans tenir compte du sens.

Et $A = 3\,(32 \times 2 + 24) = 3 \times 88 = 264$ en tenant compte du sens, ou $A = 3\,(16 \times 2 + 12) = 3 \times 44 = 132$ sans tenir compte du sens.

Il en résulte que le nombre des dispositions rectilignes d'un jeu de dominos allant jusqu'au double-quatre en tenant compte des doubles, est égal à

$$132 \times 2^5 \times 15 = 63\,360$$

nombre déjà trouvé.

Passons maintenant au cas du jeu ordinaire de 28 dominos.

La suppression d'un carrefour de l'heptagone conduit au réseau hexagonal H, dont 3 côtés sont redoublés ; en désignant par conséquent par x le nombre des parcours de l'heptagone et par H celui du labyrinthe hexagonal, on a ;

$$X = 15 \cdot H.$$

La suppression de l'un des carrefours du labyrinthe H donne naissance aux quatre nouveaux labyrinthes P_1, P_2, P_3, P_4, et on a :

$$H = 8 . P_1 + 4 P_2 + 8 P_3 + 4 P_4.$$

Par la suppression du carrefour supérieur de chacun des quatre

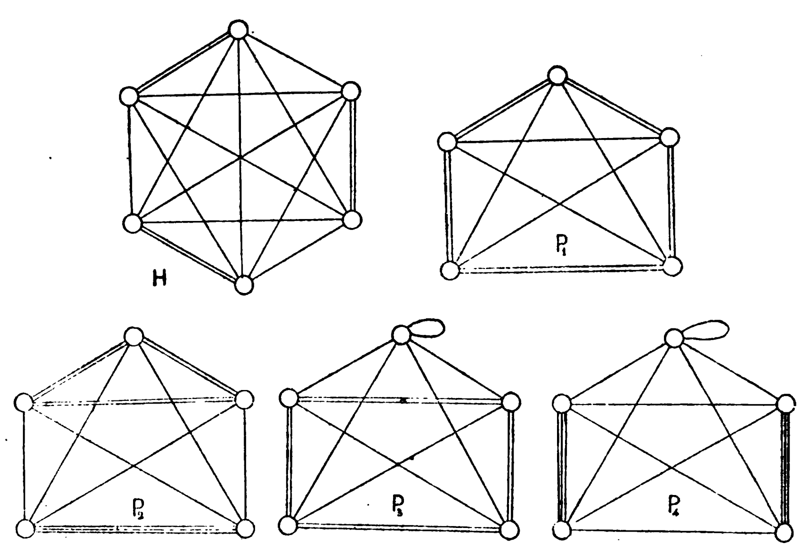


Fig. 120-121-122-123-124

labyrinthes pentagonaux P_1, P_2, P_3, P_4, on est conduit aux nouveaux labyrinthes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, et on a :

$$P_1 = 6 Q_1 + 4 Q_2 + 16 Q_3 + 16 Q_4,$$
$$P_2 = 8 Q_1 + 16 Q_3 + 2 Q_5 + 16 Q_6,$$
$$P_3 = 2 Q_1 + Q_2,$$
$$P_4 = 2 Q_1 + Q_5.$$

Par la suppression de l'un des carrefours supérieurs des six laby-

.rinthes quadrilatéraux, on est conduit aux cinq nouveaux labyrinthes

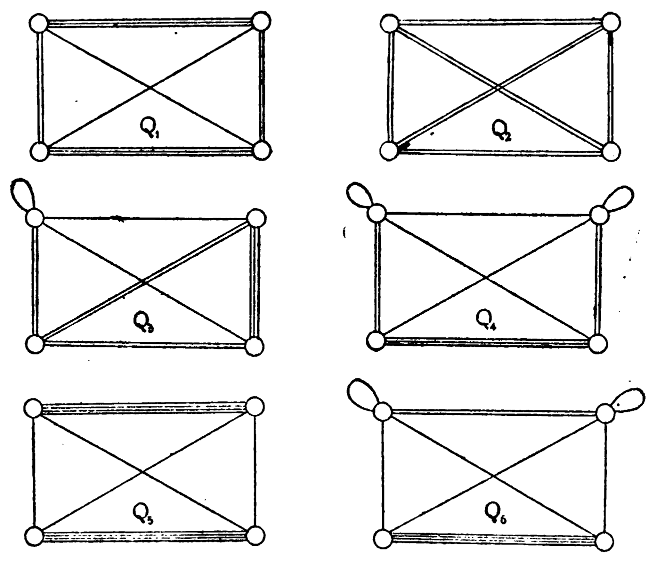


Fig. 125-126-127-128-129-130

triangulaires T_1, T_2, T_3 T_4, T_5, et l'on a :

$$Q_1 = 6\,T_1 + 24\,T_2 + 48\,T_3, \qquad Q_4 = 2\,T_2 + 4\,T_3,$$
$$Q_2 = 8\,T_1 + 24\,T_2 + 64\,T_4, \qquad Q_5 = 48\,T_2 + 24\,T_5,$$
$$Q_3 = 2\,T_1 + 4\,T_2, \qquad Q_6 = 2\,T_2 + 2\,T_5.$$

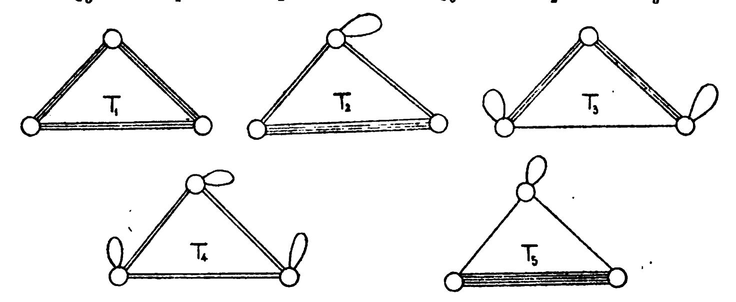


Fig. 131-132-133-134-135

suppression du carrefour supérieur de chacun l·;

labyrinthes triangulaires nous fournit trois réseaux à deux carrefours D_1, D_2, D_3, et l'on a :

$$T_1 = 6\,D_1 + 144\,D_2, \quad T_4 = 2\,D''_2 + 4\,D_3,$$
$$T_2 = 2\,D_1 + 16\,D_2, \quad T_5 = D_1.$$
$$T_3 = 12\,D'_2.$$

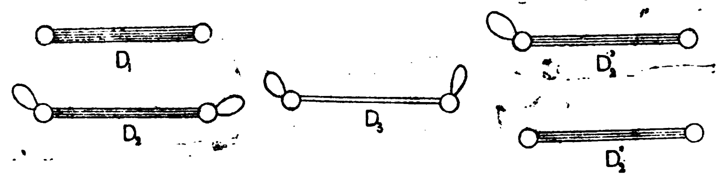


Fig. 136-137-138-139-140

Si maintenant on calcule les parcours en tenant compte du sens, on a :

$$D_1 = 2 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 2 \,.\, 5\,! = 240,$$
$$D_2 = 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 12,$$
$$D_3 = 2 \,.\, 1 = 2.$$

Par suite

$$T_1 = 3\,168,\ T_2 = 672,\ T_3 = 144,\ T_4 = 32 \text{ et } T_5 = 240\,;$$

Les labyrinthes quadrilatéraux nous donnent :

$$Q_1 = 42\,048,\ Q_2 = 43\,520,\ Q_3 = 9\,024,\ Q_4 = 1\,920,$$
$$Q_5 = 38\,016,\ Q_6 = 18\,24.$$

Passant aux pentagones, on trouve :

$$P_1 = 601\,472,\ P_2 = 585\,984,\ P_3 = 127\,916 \text{ et } P_4 = 122\,112.$$

Enfin, on a

$$H = 86\,665\,088.$$

Et

$$X = 129\,976\,320.$$

Si on ne tient pas compte du sens on aura

$$X = 649\,988\,160$$

et par suite, le nombre des dispositions rectilignes des dés d'un jeu complet de 28 dominos est égal à

$$64\,988\,160 \times 28 \times 3^7 = 2^{12}\,3^8\;5.7.4231 = 3\,979\,614\,965\,760$$

Le damier de dominos. — On prend 25 dominos que l'on dispose en damier à cases resctangulaires. Chaque ligne horizontale ou verticale compte cinq dominos qui sont placés de façon à présenter dans les deux sens des cases alternativement blanches et noires ; dans ce but, on retourne les dominos de deux en deux afin de montrer successivement l'os et le bois noir.

Cela fait et la précaution ayant été prise de mettre tous les dominos bien en contact les uns avec les autres afin d'obtenir une figure aussi régulière que possible, on propose de transformer la figure de façon que tous les dés d'une même ligne horizontale soient de la même couleur, en ne touchant que deux dominos.

Au lieu des lignes horizontales, on peut se proposer la même question pour les lignes verticales.

La solution est des plus simples.

On enlève les deuxième et quatrième dés de la première ligne horizontale et on les place au-dessous respectivement des deuxième et quatrième dés de la dernière ligne horizontale. En poussant alors ces deux dés, on remonte de la hauteur d'un dé les deuxième et quatrième colonnes verticales.

Chaque ligne horizontale ne présente plus alors que des dés d'une même couleur.

Pour rétablir la même couleur dans les colonnes verticales, on opérerait d'une façon identique.

Les dominos magiques. — On peut former avec les dominos des carrés magiques de neuf, seize ou vingt-cinq cases.

Carré de neuf cases. — Il s'agit de résoudre ce problème :

Disposer les sept blancs et deux autres dés convenablement choisis dans un carré de 9 cases, de telle sorte que la somme des points des dominos renfermés dans une ligne horizontale, dans une colonne ou dans une diagonale, soit constamment la même.

Le tableau ci-après fournit la solution de la question.

On voit que la somme donnée par chaque ligne est 12.

Au lieu des sept blancs, on peut prendre les sept as : on remplace alors les sept blancs par les sept as correspondants et les dés 1-6 et 2-6 respectivement par les dominos 2-6 et 3-6.

1-6	0-0	0-5
0-2	0-4	0-6
0-3	2-6	0 1

Fig. 141

La somme constante devient égale à 15.

On peut former d'une manière analogue les carrés magiques avec les deux, les trois et les quatre ; la somme constante devient, dans chacun des cas, égale à 18, 21 et 24.

Si dans les divers carrés magiques dont il vient d'être question, on remplace chaque dé par son complémentaire, on obtiendra encore des carrés magiques et en particulier ceux formés avec les sept cinq et les sept six.

Carré de 16 cases. — Soit à disposer les blancs et les as avec trois autres dés convenablement choisis, dans un carré de 16 cases, de façon que la somme des points marqués sur les dominos dans une même ligne horizontale, dans une colonne ou dans une diagonale, soit constamment la même.

Le tableau ci-contre donne une solution de la question.

0-3	1-3	1-2	2-6
1-1	3-6	0-2	1-4
0-6	0-1	1-5	0-5
1-6	0-4	2-5	0-0

Fig 142

Les trois dés à choisir sont le 2-6, le 3-6 et le 2-5 ; la somme constante est 18.

Le carré jouit de la même propriété si on place la première rangée horizontale après la quatrième, ou si on dispose la première rangée verticale après la dernière.

On peut obtenir d'autres carrés magiques en remplaçant chaque dé par un autre renfermant un, deux ou trois points de plus, les sommes constantes deviennent alors 22, 26 et 30.

Enfin, on peut arriver à d'autres figures du même genre, en remplaçant les dominos des carrés précédemment obtenus par leurs complémentaires.

Carré de 25 cases. — La figure ci-contre donne un exemple de ce genre de carrés magiques : la somme constante est 27 et les trois dés manquants sont le 6-6, le 6-5 et le 5-5.

3-5	0-3	0-6	2-2	5-1
1-1	3-2	6-1	4-5	4-0
6-2	4-6	0-0	2-1	2-4
0-1	3-1	5-2	6-3	3-3
4-4	4-1	3-4	0-2	0-5

Fig. 143

On peut obtenir une infinité d'autres figures du même genre.

Donnons encore la récréation suivante dans laquelle on utilise tous les dominos du jeu ou mieux les 56 petits carrés qui groupés deux à deux constituent les 28 dés.

On demande de disposer les dominos de façon à former un carré de $7 \times 7 = 49$ cases, avec une bordure supplémentaire de 7 carrés blancs, de telle sorte que la somme des points dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans les deux diagonales soit égale à 24.

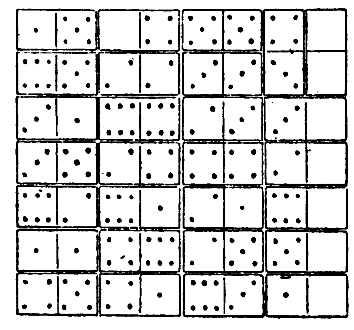


Fig. 144

Nous donnons une solution ci-après [1].

De même une suite de dominos allant du double-blanc au double n, contient $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ dominos et, par suite, $(n+1)(n+2)$ petits carrés accolés deux à deux.

Est-il possible de disposer ces dominos de façon à former un

(1) Voir le nº de l'*Illustration* du 10 juillet 1897.

carré de $(n+1)^2$ cases, avec une colonne supplémentaire de $(n+1)$ carrés blancs, de telle sorte que la somme des points dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans les deux diagonales soit égale à $\frac{1}{2}n(n+2)$?

CHAPITRE X

TROIS PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Parmi les plus intéressants problèmes de géométrie de l'antiquité, trois questions attirèrent spécialement l'attention des premiers mathématiciens grecs. Nos connaissances en géométrie prenant leur source en Grèce, ces questions sont devenues classiques dans l'histoire de cette science. Ce sont : 1° la Duplication du cube, c'est-à-dire la détermination du côté d'un cube dont le volume est double de celui du cube donné ; 2° la Trisection de l'angle et 3° la Quadrature du cercle, c'est-à-dire la recherche d'un carré dont la surface est égale à celle d'un carré donné. Ces trois problèmes devaient être résolus au moyen de constructions dans lesquelles, seules, la ligne droite et la circonférence intervenaient, c'est-à-dire par la géométrie euclidienne.

Ainsi posés, ces trois problèmes sont insolubles (1). Pour doubler un cube dont le côté est a, il s'agit de trouver une ligne de longueur x telle que l'on ait : $x^3 = 2a^3$.

Pour diviser un angle en trois parties égales, nous pouvons commencer par calculer le sinus de l'angle à diviser, soit a, puis si x représente le sinus du tiers de cet angle, nous avons la relation.

$$4x^3 = 3x - a.$$

(1) F. Klein. — *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar geometrie*, Leipzig, 1895.

Ainsi, le premier et le second problèmes, considérés analytiquement, conduisent à la résolution d'une équation du troisième degré ; et comme une construction au moyen de cercles (dont les équations sont de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$) et de lignes droites (dont les équations sont de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$) ne peut conduire à une équation du troisième degré, il en résulte que ces problèmes sont insolubles si on se limite, dans les constructions, à l'usage de la règle et du compas. Mais ces deux problèmes peuvent être résolus de plusieurs manières au moyen des sections coniques.

Le troisième problème est d'une nature différente, mais il est également impossible.

Nous nous proposons tout d'abord de faire connaître quelques-unes des constructions qui ont été proposées pour les deux premiers problèmes. Pour ménager l'espace, le texte ne sera pas accompagné de figures et, dans bien des cas, nous nous dispenserons de donner la démonstration. Nous terminerons par quelques notes historiques sur les solutions approximatives du problème de la quadrature du cercle.

La duplication du cube (¹). — Le problème de la *Duplication du cube* était connu dans les temps anciens sous le nom de *problème de Delos* ou *problème Deliaque*, en souvenir d'une légende d'après laquelle les Athéniens auraient consulté Platon à son sujet. Philoponus (²) présente l'histoire sous cette forme : les Athéniens, fortement éprouvés par une épidémie, consultèrent l'oracle de Délos pour savoir comment le fléau pouvait être arrêté. L'oracle répondit qu'il fallait doubler l'autel d'Apollon, qui était cubique.

(¹) Voir *Historia Problematis de Cubi Duplicatione*, par N.-T. Reimer, Göttingen, 1798; voir aussi *Historia Problematis Cubi Duplicandi*, par C.-H. Biering, Copenhague, 1844, et aussi *Das Delische Problem*, par A. Sturm, Linz, 1895-97. Quelques notes sur cette question se trouvent dans notre *Histoire des mathématiques*. Edition française traduite sur la 3ᵐᵉ édition anglaise par L. Freund-Paris Hermann, 2 vol. (1906-1907).

(²) *Philoponus ad Aristotelis Analytica Posteriora*, livre I, chap. vii.

Rien ne parut plus simple aux solliciteurs dont les connaissances en géométrie n'étaient probablement pas très développées et ils construisirent un second autel dont les dimensions étaient doubles de celles de l'ancien (ce qui donnait un cube ayant huit fois le volume du premier) ou peut-être se contentèrent-ils de placer à côté du premier autel un second identiquement semblable. Quoi qu'il en soit, suivant la légende, la Divinité courroucée rendit le fléau plus terrible encore et informa une nouvelle députation qu'il était inutile de chercher à ruser : elle exigeait un autel cubique double en volume de celui qui existait. Soupçonnant quelque chose de mystérieux, les Athéniens s'adressèrent à Platon qui les renvoya aux géomètres. L'intervention de Platon ici est un anachronisme manifeste. Eratosthème (1) raconte une histoire à peu près semblable mais en parlant de Minos comme l'auteur du problème.

Dans un ouvrage arabe, la légende grecque est défigurée d'une façon si étrange que nous la citerons par curiosité. A l'époque où vivait Platon, raconte l'écrivain, un fléau s'abattit sur les enfants d'Israël, alors un de leurs prophètes entendit une voix du ciel qui disait : « que l'on double l'autel cubique qui sert aux sacrifices et le fléau prendra fin », on construisit donc un second autel exactement semblable au premier auquel il fut accolé. Malgré cela, le fléau n'en persistait pas moins en augmentant d'intensité. Et la même voix se fit entendre qui disait : « on a construit un second autel identique au premier avec lequel il a été réuni, mais cela ne constitue pas la duplication du cube ». C'est alors que Platon, le sage de la Grèce, fut consulté ; il répondit : « Vous avez négligé la science de la géométrie et Dieu vous a châtié, car c'est la science sublime par excellence », maintenant la duplication du cube repose sur un problème difficile de géométrie consistant... Puis suit la solution d'Apollonius que nous donnons plus loin.

Si on représente par *a* la longueur du côté du cube donné et

(1) *Archimedis Opera cum Eutocii Commentariis*, édition Torelli, Oxford, 1792, p. 144; édition Heiberg, Leipzig, 1880-81, vol. III, pp. 104-107.

par x le côté du cube cherché, on a : $x^3 = 2a^3$, c'est-à-dire $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1}$. Les Grecs n'ignoraient probablement pas que ce dernier rapport est incommensurable, ce qui revient à dire qu'il n'est pas possible de trouver un nombre entier dont le rapport à l'unité soit exprimé par $\frac{\sqrt[3]{2}}{1}$, mais il ne s'en suivait pas l'impossibilité d'établir un pareil rapport par la géométrie. Par exemple, le côté et la diagonale d'un carré sont bien deux lignes qui ne peuvent être mesurées l'une par l'autre, c'est-à-dire dont le rapport est incommensurable.

Reproduisons maintenant quelques-unes des constructions géométriques qui ont été données pour la duplication du cube [1] en nous limitant (à une exception près) à celles qui peuvent être effectuées au moyen des sections coniques.

Hippocrate [2] (environ 420 A. C.) est peut-être le plus ancien mathématicien ayant fait faire quelques progrès à la question. Sans donner une solution géométrique, il ramène le problème à la recherche de deux moyennes proportionnelles entre une certaine ligne a et la ligne de longueur double $2a$. Soient, en effet, x et y ces moyennes, nous avons

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

d'où l'on déduit : $xy = 2a^2$, $x^2 = ay$ et $x^3 = 2a^3$.

Le problème est toujours étudié sous cette forme actuellement.

(1) En ce qui concerne l'application, à ce problème, des méthodes traditionnelles d'analyse des Grecs par Heron et Philon (conduisant à une solution au moyen du cercle d'Apollonius), par Nicomede (conduisant à une solution au moyen de la conchoïde) et par Pappus (donnant une solution au moyen de la cissoïde), voir l'ouvrage de J. Leslie, *Geometrical Analysis*, Edinburgh, 2e édition, 1811, pp. 247-250, 453.

(2) Proclus. — Edit. Friedlein, pp. 212-213.

Autrefois tout procédé de solution reposant sur la recherche de ces moyennes était appelé un problème mésolabe.

Une des premières solutions de la question est celle donnée par Archytas (1), en ou vers 400 A. C. Sa construction se résume ainsi : sur le diamètre OA du cercle de base d'un cylindre droit on décrit une demi-circonférence dans un plan perpendiculaire à celui de la base ; on fait alors tourner ce dernier plan autour de la génératrice du cylindre passant par O, la demi-circonférence engendre dans ce mouvement de rotation une surface qui coupe le cylindre suivant une courbe à double courbure. Cette courbe à son tour est coupée par la surface latérale d'un cône droit ayant OA pour axe et dont le demi-angle au sommet est de 60° par exemple, en un point P tel que la projection de OP sur la base du cylindre est au rayon du cylindre dans le rapport du côté du cube cherché au côté du cube donné. La démonstration donnée par Archytas est purement géométrique et il est intéressant de constater qu'elle montre que ce géomètre connaissait certaines propositions énoncées par Euclide.

Pour démontrer analytiquement l'exactitude de la construction d'Archytas, prenons OA pour axe des x et la génératrice du cylindre passant par O pour axe des z, alors en employant la notation usuelle des coordonnées polaires et en désignant par a le rayon du cylindre, on a : pour l'équation de la surface décrite par le demi-cercle, $r = 2a \sin \theta$; pour celle de la surface cylindrique $r \sin \theta = 2a \cos \varphi$; et pour celle de la surface latérale du cône $\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2}$.

Ces trois surfaces se coupent en un point tel que $\sin^3 \theta = \frac{1}{2}$, d'où l'on déduit.

$$(r \sin \theta)^3 = 2a^3 ;$$

Par suite, le volume du cube dont le côté est $r \sin \theta$ est le double du volume du cube dont le côté est a.

(1) *Archimedis Opera*, édition Torelli, p. 143 ; édition Heiberg, vol. III, pp. 98-103.

La construction attribuée à Platon [1] (environ 360 A. C.) repose sur ce théorème : CAB et DAB sont deux triangles rectangles ayant un côté AB commun, les côtés AD et BC parallèles, et les hypoténuses AC, BD perpendiculaires entre elles ; si P est le point d'intersection de ces deux hypoténuses on a :

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD},$$

Si donc l'on pouvait construire une telle figure avec PD = 2PC, le problème serait résolu. Il est possible de construire un instrument permettant de tracer une figure remplissant la condition imposée.

Menœchme [2] est ensuite le premier géomètre que l'on cite comme s'étant occupé du problème, il en donna deux solutions en 340 A. C. ou vers cette époque.

Dans la première, il signale que deux paraboles ayant un sommet commun, les axes à angle droit, et telles que le *latus rectum* de l'une soit double du *latus rectum* de l'autre, se coupent en un second point dont l'abscisse (ou l'ordonnée) donne une solution de la question. La démonstration par l'analyse est très simple ; car si les équations des paraboles sont $y^2 = 2ax$ et $x^2 = ay$, ces courbes se coupent en un point dont l'abscisse est donnée par l'équation $x^3 = 2a^3$. Il est probable que cette solution a été inspirée par la façon dont Hippocrate avait présenté la question ; nous avons déjà dit, en effet, qu'il ramenait le problème à la détermination des deux longueurs x et y telles que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, et l'on déduit de cette double relation $x^2 = a.y$ et $y^2 = 2ax$.

La seconde construction de Menœchme s'effectue ainsi : on

(1) *Archimedis Opera*, édition Torelli, p. 135 ; édition Heiberg, vol. III, pp. 66-71.

(2) *Archimedis Opera*, édition Torelli, pp. 141-143 ; édition Heiberg, vol. III, pp. 92-99.

décrit une parabole dont le *latus rectum* est l, puis une hyperbole équilatère dont la longueur de l'axe réel est égale à $4l$, et ayant pour asymptotes la tangente au sommet et l'axe de la parabole.

L'ordonnée et l'abscisse du point d'intersection de ces courbes sont deux moyennes proportionnelles entre l et $2l$. L'analyse le montre de suite. Les équations de ces courbes sont $x^2 = ly$, $xy = 2l^2$, elles se coupent un point déterminé par les deux équations $x^3 = 2l^3$ et $y^3 = 4l^3$; par suite

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2l}.$$

La solution donnée par Apollonius (1) environ deux cent vingt ans A. C., se résume ainsi : le problème consistant à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, on construit un rectangle OADB dont les deux côtés adjacents OA, OB sont respectivement égaux aux deux lignes données et on marque le milieu C de AB. De ce point comme centre on décrit une circonférence coupant le prolongement de OA en a et le prolongement de OB en b, de telle sorte que les trois points a, D et b soient en ligne droite. Si un pareil cercle peut être tracé, il en résulte que l'on a :

$$\frac{OA}{Bb} = \frac{Bb}{Aa} = \frac{Aa}{OB};$$

ainsi Bb et Aa sont les deux moyennes proportionnelles entre OA et OB. Il est impossible de décrire le cercle de centre C au moyen de la géométrie euclidienne, mais Apollonius fait connaître un procédé mécanique permettant de le tracer.

La seule autre solution datant des temps anciens que nous croyons utile de citer est celle présentée par Dioclès et Sporus (2).

(1) *Archimedis Opera*, édition Torelli, p. 137; édition Heiberg, vol. III, pp. 76-79. La solution est donnée dans notre *Histoire des mathématiques*, Londres, 1901, p. 84.

(2) *Ibid.*, édition Torelli, pp. 138, 139, 141; édition Heiberg, vol. III, pp. 78, 84, 90, 93.

Soit un rectangle dont les côtés OA, OB sont respectivement égaux aux deux lignes entre lesquelles les moyennes doivent être insérées et supposons OA plus grand que OB. Du point O comme centre et avec le rayon OA décrivons une circonférence qui coupe les prolongements respectifs des côtés OB, OA, en C et en D. Déterminons sur BC un point E tel que si DE coupe la droite AB prolongée en F et la circonférence en G, on ait : FE = EG. Si ce point E peut se déterminer sur BC, OE représente la première des moyennes proportionnelles entre OA et OB. Dioclès imagina la cissoïde pour obtenir le point E, mais on peut également l'obtenir au moyen des coniques.

D'autres solutions ont été proposées à des époques plus modernes. Nous pouvons faire allusion, en passant, aux trois données par Huygens (1), mais nous ne résumerons que celles proposées par Viète, Descartes, Grégoire de Saint-Vincent et Newton.

Voici la construction de Viète (2) : on décrit un cercle, de centre O, dont le rayon est égal à la moitié de la longueur de la plus grande des deux lignes données. On y inscrit une corde AB égale à la plus petite des deux lignes et on prolonge AB jusqu'en E de manière que BE = AB ; par A on mène la parallèle AF à OE. Enfin, par le centre O, on trace une droite DOCFG coupant la circonférence en D et C, AF en F, et le prolongement de BA en un point G tel que GF = OA. Si cette ligne peut être tracée, on a :

$$\frac{AB}{GC} = \frac{GC}{GA} = \frac{GA}{CD}.$$

Descartes a fait remarquer (3) que les courbes $x^2 = ay$ et $x^2 + y^2 = ay + bx$, se coupent en un point (x, y) tel que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

(1) *Opera Varia*, Leyde, 1724, pp. 393-396.
(2) *Opera mathematica*, édition Schooten, Leyde, 1646, prop. 5, pp. 242-243.
(3) *Geometria*, livre III, édition Schooten, Amsterdam, 1659, p. 91.

C'est une solution identique à la première de Menœchme, mais Descartes emploie le cercle au lieu d'une seconde conique.

La construction de Grégoire a été donnée sous la forme d'un théorème, comme il suit [1] : l'hyperbole menée par le point d'intersection de deux des côtés d'un rectangle, de façon à avoir pour asymptotes les deux autres côtés, rencontre le cercle circonscrit au rectangle en un point dont les distances aux asymptotes sont moyennes proportionnelles entre les côtés adjacents du rectangle.

C'est la traduction géométrique de cette proposition que les deux courbes $xy = ab$, $x^2 + y^2 = ay + bx$
se coupent en un point (x,y) tel que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{b}{y}.$$

Voici enfin une des constructions proposées par Newton [2]. Soit OA la plus grande des deux lignes données dont le milieu est en B ; de O comme centre avec le rayon OB décrivons une circonférence et prenons un point C sur cette courbe de manière que la corde BC soit égale à la seconde des lignes données. Par O menons la droite ODE coupant en D le prolongement de AC et en E le prolongement de BC, de telle sorte que l'on ait : DE = OB. Alors

$$\frac{BC}{OD} = \frac{OD}{CE} = \frac{CE}{OA},$$

et les segments OD, CE représentent les deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes BC et OA.

Problème de la trisection de l'angle [3]. — Le problème

(1) Grégoire de Saint-Vincent. — *Opus Geometricum Quadraturæ Circuli*, Anvers, 1647, livre VI, prop. 138, p. 602.

(2) *Arithmetica Universalis*, 2e édition de Ralphson, 1728, p. 242; voir aussi, pp. 243, 245.

(3) Pour la bibliographie de la question, voir le supplément de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris, mai et juin 1904.

de la trisection de l'angle constitue la seconde de ces questions qui nous ont été léguées par les anciens sans toutefois l'enrichir d'une légende plus ou moius vraisemblable.

Parmi toutes les solutions qui ont été présentées, les deux suivantes figurent comme les plus anciennes et les meilleures, elles sont citées par Pappus [1], mais nous ne savons à qui en attribuer l'origine.

Première solution. — Soit AOB l'angle donné. D'un point quelconque P pris sur OB, on abaisse la perpendiculaire PM sur OA et on détermine sur MP un point Q tel que la droite OQ prolongée coupe la parallèle à OA menée par P en un point R tel que QR = 2OP. Si cette construction est possible, on a :

$$\text{AOR} = \frac{1}{3}\,\text{AOB}.$$

Le problème revient à déterminer le point R, ce qui peut se faire au moyen d'une construction présentée analytiquement comme il suit : soit $\frac{b}{a}$ l'expression de la tangente de l'angle donnée ; construisons l'hyperbole $xy = ab$ et le cercle $(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 = 4(a^2 + b^2)$.

Soit x la plus grande des abscisses des points d'intersection, on a PR $= x - a$ et arc tg. $\frac{b}{x} = \frac{1}{3}$ arc tg $\frac{b}{a}$.

Seconde solution. — Soit AOB l'angle donné. Prenons OA = OB et de O comme centre avec OA pour rayon, décrivons une circonférence. Sur le prolongement de OA on prend un point C à l'extérieur du cercle tel que CB coupe la circonférence en un point

[1] Pappus. — *Mathematicæ Collectiones*, livre IV, prop. 32, 33 (édition Commandini, 1670, pp. 97-99). Pour l'application, à cette question, des méthodes traditionnelles d'analyse des Grecs, voir l'ouvrage J. Leslie, *Geometrical Analysis*, Edinburgh, 2e édition, 1811, pp. 245-247.

D dont la distance à C soit égale au rayon OA, puis on mène la parallèle OE à CDB. Si cette construction peut se réaliser, on a : $AOE = \frac{1}{3} AOB$.

Les anciens déterminaient la position du point C au moyen de la conchoïde ; on peut également utiliser les sections coniques.

Donnons maintenant quelques autres solutions dans lesquelles les sections coniques seules sont employées.

Voici d'abord une nouvelle construction présentée par Pappus (1). On décrit une hyberbole dont l'excentricité est égale à 2 ; soient C son centre et A,A′ ses sommets. Prolongeons CA′ d'une longueur A′S égale à CA′, et sur AS décrivons un segment capable de l'angle donné, lequel est coupé en O par la perpendiculaire élevée sur le milieu de AS. De ce point O comme centre avec OA ou OS pour rayon, décrivons une circonférence qui rencontre en P la branche de l'hyperbole passant par A′. On a : $SOP = \frac{1}{3} SOA$.

Dans les temps modernes, l'une des plus anciennes solutions faisant directement usage des coniques a été trouvée par Descartes (2) : elle se ramène à la détermination des points d'intersection, autre que l'origine, de la parabole $y^2 = \frac{1}{4} x$ avec le cercle.

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4} x + 4ay = 0.$$

Les ordonnées de ces points sont données par l'équation $4y^3 = 3y - a$. La plus petite racine positive est le sinus du $\frac{1}{3}$ de l'angle dont le sinus est égal à a.

La démonstration est fort ingénieuse.

Une des solutions proposées par Newton est pratiquement équivalente à la troisième de celle donnée par Pappus. La voici en

(1) Pappus. — *Mathematicæ Collectiones*, livre IV, prop. 34, pp. 99-104.
(2) *Geometria*, livre III, édition Schooten, Amsterdam, 1659, p. 91.

quelques mots (1) : soit A le sommet de l'une des branches d'une hyperbole dont l'excentricité est 2, et S le foyer de l'autre branche ; sur AS on décrit le segment capable du supplément de l'angle donné, lequel coupe en P la branche de l'hyperbole de foyer S. Alors l'angle PAS est égal au $\frac{1}{3}$ de l'angle donné.

L'élégante solution suivante est due à Clairaut (2). Soit AOB l'angle donné ; on prend sur ses côtés les longueurs égales OA, OB et du point O comme centre on décrit la circonférence de rayon OA. On trace la corde AB que l'on divise en trois parties égales aux points H et K, AH = HK = KB ; puis on mène la bissectrice OC de l'angle AOB, laquelle coupe AB en L. On a AH = 2HL. On décrit alors une hyperbole de foyer A, de sommet H et dont la directrice est OC. Soit P le point d'intersection de la circonférence OA avec la branche de l'hyperbole passant par H ; le prolongement de la perpendiculaire PM abaissée de P sur OC coupe en Q la même circonférence OA. Alors, d'après les propriétés connues de la directrice et du foyer on a :

$$\frac{AP}{PM} = \frac{AH}{HL} = \frac{2}{1}.$$

d'où AP = 2PM = PQ ; dès lors, par symétrie AP = PQ = QR et

$$\widehat{AOP} = \widehat{POQ} = \widehat{QOR}.$$

Nous terminerons en rappelant la solution que Chasles (3) considérait comme fondamentale. Elle se ramène à cette proposition :

(1) *Arithmetica universalis*, problème XLII, Ralphson. 2e édition, Londres, 1728, p. 148; voir aussi pp. 243-245.

(2) Nous pensons que cette solution a été donnée pour la première fois par Clairaut, mais nous avons égaré nos références à ce sujet. Cette construction se présente comme exemple dans la *Geometry of conics* de C. Taylor, Cambridge, 1881, n° 308, p. 126.

(3) *Traité des sections coniques*, Paris, 1866, art. 37, p. 36.

AB étant un arc de cercle de centre O que l'on se propose de diviser en trois parties égales, l'hyperbole équilatère ayant pour diamètre OA et passant par le point d'intersection de OB avec la tangente au cercle en A, passe également par l'un des deux points qui divisent l'arc AB en trois parties égales.

La quadrature du cercle (1). — Le troisième des problèmes historiques dont nous nous occupons ici a pour objet la *détermination du côté d'un carré dont la surface est égale à celle d'un cercle donné.*

Les essais tentés antérieurement aux deux derniers siècles eurent pour heureux résultats de faire découvrir aux mathématiciens d'intéressantes propriétés ; dans ces temps derniers, la question a été quelque peu négligée par ceux qui étaient en mesure de l'élucider davantage. L'historique du sujet a été présenté avec tant de détails par des auteurs autorisés que nous nous contenterons d'y faire une courte allusion.

Archimède montra (2) (ce que l'on savait peut-être avant lui) que le problème revenait à trouver la surface d'un triangle rectangle dont les côtés étaient respectivement égaux au périmètre et au rayon du cercle considéré. Le demi-rapport de ces deux lignes est un nombre que l'on représente généralement par π.

L'incommensurabilité du nombre π avait été très longtemps soupçonnée, mais aujourd'hui elle est démontrée. Lambert (3), le

(1) Voir Montucla. — *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, édition Lacroix, Paris, 1831 ; voir aussi divers articles de A. de Morgan, et principalement son *Budget of Paradoxes*, Londres, 1872. Un aperçu du sujet a été donné d'une façon élémentaire par H. Schubert. — *Die Quadratur des Zirkels*, Hambourg, 1889 ; et depuis la publication de ces *Récréations*, le prof. F. Rudio de Zurich a reproduit les études d'Archimède, Huygens, Lambert et Legendre sur le sujet, avec une introduction présentant l'historique de la question, Leipzig, 1892.

(2) *Archimedis Opera*, Κὺκλον μέτρησις, prop. 1, édition Torelli, pp. 203-205 ; édition Heiberg, vol. I, pp. 254-261, vol. III, pp. 269-277.

(3) *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1761, Berlin, 1768, pp. 265-322.

premier, démontra analytiquement, en 1761, que π était incommensurable ; puis, en 1803, Legendre (1) fit voir qu'il en était de même du nombre π^2 ; récemment, Lindemann (2) a montré que π ne peut être racine d'une équation algébrique rationnelle.

Plus anciennement James Gregory avait tenté de démontrer géométriquement l'impossibilité de la quadrature et son essai doit être mentionné ici. Il commençait par démontrer (3) que le rapport de la surface d'un secteur quelconque à celle du polygone inscrit ou circonscrit ne peut être exprimé par un nombre fini de termes algébriques et il en concluait que la quadrature du cercle était impossible. Montucla considère cette preuve comme valable, mais elle n'est pas concluante, car on conçoit très bien la possibilité de former un carré dont la surface soit égale à celle d'un certain secteur particulier, et ce secteur particulier peut être le cercle entier.

Comme suite à ce qui vient d'être dit de la proposition de Gregory, nous pouvons ajouter que Newton (4) a prouvé que, dans toute ovale fermée, un secteur arbitraire limité par la courbe et par deux rayons ne peut être exprimé en fonction des coordonnées des extrémités de l'arc au moyen d'un nombre fini de termes algébriques.

L'argumentation est serrée et difficile à suivre : le même raisonnement démontrerait qu'une courbe ovale fermée ne peut être représentée en coordonnées polaires par une équation algébrique.

(1) *Géométrie* de LEGENDRE, traduction BREWSTER, Edimbourg, 1824, pp. 239-245.

(2) *Ueber die Zahl* π; *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1882, vol. XX, pp. 213-225. La démonstration conduit à cette conclusion que, si x est une racine d'une équation algébrique à termes entiers et rationnels, e^x ne peut être rationnel : par suite, si πi était racine d'une telle équation, $e^{\pi i}$ ne serait pas rationnel; mais $e^{\pi i}$ est égal à -1, et, par conséquent, est rationnel ; dès lors πi ne peut être racine d'une équation algébrique à termes entiers et rationnels, et, par suite, il en est de même de π.

(3) *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, Padoue, 1868 : cette démonstration est reproduite dans HUYGHENS.— *Opera Varia*, Leyde, 1724, pp. 405-462.

(4) *Principia*, livre I, section VI, Lemne XVIII.

Aucune conclusion ne peut être tirée de cette proposition en ce qui touche la quadrature du cercle et Newton n'en a en réalité tiré aucune. Dans les premières éditions de cet ouvrage nous émettions cette opinion que le résultat établi présupposait une définition particulière du mot ovale, mais après examen plus complet, nous pensons que la conclusion est valable sans aucune restriction.

La quadrature du cercle s'effectue aisément avec la quadratrice, la spirale ou la cycloïde, mais la construction de ces courbes supposant la connaissance de la valeur de π, il en résulte que la question, telle qu'elle a été posée, subsiste toujours.

Il est peut-être nécessaire d'ajouter ici qu'en considérant π comme représentant simplement le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, la détermination de sa valeur numérique ne présente qu'un intérêt secondaire. Mais ce n'est qu'accidentellement que π a été ainsi défini, il représente, en réalité, un certain nombre dont l'existence s'impose dans l'analyse algébrique.

Il nous revient le souvenir d'un professeur distingué cherchant à rendre compte des modifications qui pourraient subvenir dans notre genre de vie ordinaire si, ce qui, d'ailleurs, aurait facilement pu se produire à l'origine de notre race, les procédés fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre avaient été différents de ceux qui nous sont familiers. Mais, concluait-il, il serait impossible de concevoir un univers dans lequel e et π n'existeraient pas.

Nous avons cité, dans une autre publication, une anecdote qu'on relira peut-être avec plaisir, pour montrer que la définition usuelle de π donnait une bien faible idée des propriétés de ce nombre.

De Morgan, expliquant à un actuaire quelle chance une proportion déterminée d'un groupe de personnes avait d'être encore en vie à la fin d'un temps donné, mentionnait la formule dans laquelle figure π qui, disait-il, ponr répondre à une question, représente le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Son auditeur qui, jusqu'ici, l'avait écouté avec intérêt, l'interrompit alors pour s'écrier : « Ce doit être une erreur ; que vient faire un cercle

et son diamètre dans une question relative au nombre de personnes qui seront encore en vie à une époque déterminée ? »

En réalité, le fait que le rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre est le nombre désigné par π ne donne pas la meilleure définition analytique de π, et ne spécifie qu'une de ses propriétés.

La lettre π n'a pas été choisie au hasard pour représenter le nombre 3,14159..., elle est l'initiale de περιφέρεια ou de περίμετρος et il paraît difficile de déterminer exactement l'origine de cette notation qui paraît cependant remonter au XVII[e] siècle.

On lit en effet dans l'ouvrage d'Oughtred : *La Clef des Mathématiques* (*The key of the Mathematics*, London, 1647, p. 72).

if in a circle 7 . 22 :: δ . π :: 113 . 355 it shal be δ . π :: 2 RP : and δ . π :: R*q*. circl. and π . δ :: $\frac{1}{4}$ P*q*. circl. etc.

Barrow employait également la lettre π dans ses leçons publiques, continuées jusqu'en 1669 à Cambridge. En effet, dans le livre *Isaaci Barrow-Mathematicæ lectiones habitæ in scholis publicis Academiæ Cantabrigensis*. Londini, typis 1. Playford, a. 1684, on lit (p. 343) : « Circulus æquatur dimidio rectangulo ex circumferentia et radio,... Hoc est, posito (ut semper posthac) circumferentiam vocari π, et radium R (vel r). et diametrum δ (vel D)

$$0 = \frac{r.\pi}{2} = \frac{\delta.\pi}{4}. »$$

Moritz Cantor (*Geschichte der Mathematik*, III, 295) signale l'emploi de la lettre π par William Jones dans la *Synopsis Palmariorum Matheseos*, Londres, 1706, pp. 242, 263 et suivantes (¹). Quelques années plus tard, Jean Bernoulli (²) désignait ce nombre par c ; Eu-

(¹) *Intermédiaire des Mathématiciens*, tome IV, juin 1897, pp. 124, 125; tome V, juillet 1898, p. 154, octobre 1898, p. 231.

(²) Voir les notes de G. Eneström dans *Bibliotheca Mathematica*, Stockholm, 1889, vol. III, p. 28; *ibid.*, 1890, vol. IV, p. 22.

ler, en 1734, se servit de la lettre *p*, et en 1736 de la lettre *c*; Chr. Goldback employa π en 1742 ; et ce symbole devint d'un usage général après la publication de l'*Analyse* d'Euler.

La valeur numérique de π peut être calculée au moyen de deux méthodes avec une approximation aussi grande qu'on le désire.

La première de ces méthodes est géométrique : elle consiste à calculer les périmètres d'une série de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle en considérant la circonférence comme toujours comprise entre les longueurs de ces périmètres (1). L'approximation serait plus grande en calculant les surfaces au lieu des périmètres. La seconde méthode, qui est la méthode moderne, repose sur la détermination d'une série convergente représentant π.

Ajoutons que les géomètres qui calculent π au moyen de la première méthode regardent ce nombre comme un simple rapport géométrique, tandis que les mathématiciens qui emploient la méthode moderne le considèrent comme un symbole représentatif d'un certain nombre figurant dans plusieurs branches de l'analyse mathématique.

Nous intéresserons peut-être nos lecteurs en donnant ici une liste de quelques valeurs approchées de π déterminées à diverses époques par plusieurs géomètres (2). Nous nous rendrons ainsi incidemment compte de ceux qui ont fait progresser la question.

Le document mathématique le plus ancien qui existe, le *Papyrus Rhind* (environ 2.000 ans avant J.-C.), énonce déjà le problème sous cette forme : construire un carré équivalent à un cercle donné. L'auteur du Papyrus, *Ahmès*, donne la règle suivante : on

(1) L'histoire de cette méthode a été écrite par K.-E.-I. Selander. — *Historik öfver Ludolphska Talet*, Upsal, 1868.

(2) Au sujet des méthodes usités dans les temps classiques et des résultats obtenus, voir les notices publiées dans *Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, Leipzig, vol. I, 2e édition, 1892. Au sujet des valeurs approchées obtenues au Moyen-âge et dans les temps modernes, voir l'article de A. de Morgan sur la quadrature du cercle dans le vol. XIX de *Penny Cyclopædia*, Londres, 1841, avec les additions données par B. de Haan dans le *Verhandelingen* d'Amsterdam, 1858, vol. IV, p. 22 ; ces divers résultats ont

retranche du diamètre une quantité égale à son neuvième ; on construit un carré ayant pour côté la partie restante, il est équivalent au cercle. On obtient ainsi pour π une valeur pas trop erronée.

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1605 \text{ (}^1\text{)}.$$

La valeur 3 un peu moins approchée était en usage chez les Babyloniens [2] et chez les Juifs [3]. Il est probable que ces nombres ont été obtenus d'une façon empirique.

Nous arrivons ensuite à une longue suite de mathématiciens grecs qui abordèrent le problème. Il est douteux que les recherches des disciples de l'école Ionienne, les Pythagoriciens Anaxagore, Hippias, Antiphon et Bryson conduisirent à une valeur numérique de π plus approchée, et il n'est pas nécessaire de nous y arrêter. La quadrature de certaines lunules présentée par Hippocrate de Chios est ingénieuse et correcte, mais on ne peut en déduire une valeur de π ; il paraît d'ailleurs probable que les derniers élèves de l'école Athénienne firent porter leurs recherches sur d'autres questions.

Euclide [4], l'illustre fondateur de l'école d'Alexandrie, savait probablement que π est compris entre trois et quatre, mais il n'en fait pas mention d'une façon explicite.

L'étude mathématique de la question commence avec Archimède qui prouva que π est moindre que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$, c'est-à-dire est compris entre 3,1428... et 3,1408... Il arriva à ce

été réunis, corrigés et étendus par le Dr W.-L. Glaisher dans le *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1873, vol. II, pp. 119-128; et *ibid.*, 1874, vol. III, pp. 27-46.

(2) A. Eisenlohr. — *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig, 1877, Art. 100-109, 117, 124.

(3) Oppert. — *Journal Asiatique*, août 1872, et octobre 1874.

(4) 1. *Livre des Rois*, ch. vii, ver. 23; 2. *Chroniques*, ch. iv, ver. 2.

(1) Ces résultats peuvent se déduire des propositions 14 et 8 du livre IV d'Euclide.

résultat [1] en inscrivant et en circonscrivant à un cercle les polygones réguliers de 96 côtés, en déterminant géométriquement les périmètres de ces figures et enfin en admettant que la longueur de la circonférence est comprise entre les périmètres.

Cette méthode revient à appliquer la proposition résumée dans la double inégalité

$$\sin \theta < \theta < \text{tang}\ \theta$$

en faisant $\theta = \frac{\pi}{96}$. Archimède déduisait les valeurs de $\sin \theta$ et $\text{tang}\ \theta$ de celle de $\sin \frac{1}{3} \pi$ et $\text{tang}\ \frac{1}{3} \pi$ par des divisions successives d'angles en deux parties égales. Avec un polygone de n côtés, ce procédé nous donne une valeur de π exacte au moins jusqu'à la décimale dont le rang est marqué par la partie entière de l'expression ($2 \log. n - 1{,}19$). Le résultat donné par Archimède est exact jusqu'à la deuxième décimale. Son analyse de la question conduisait à cette conclusion que les périmètres des deux polygones considérés pour un cercle de 4970 pieds de diamètre étaient compris entre 15 610 et 15 620 pieds. Il faut compter environ pour la circonférence 15 613 pieds 9 pouces.

Apollonius a discuté ces résultats, mais ses observations critiques sont perdues.

Héron d'Alexandrie [2] a donné la valeur 3, mais il a mentionné également le résultat $\frac{22}{7}$ [3] : il est possible que le premier nombre servait seulement pour une approximation grossière.

La seule autre valeur approchée ayant une origine grecque que

[1] *Archimedis Opera,* Κύκλου μέτρησις, prop. 3, édition Torelli, Oxford, 1792, pp. 205-216; édition Heiberg, Leipzig, 1880, vol. I, pp. 263-271.

[2] *Mensuræ*, édition Hultsch, Berlin, 1864, p. 188.

[3] *Geometria*, édition Hultsch, Berlin, 1864, pp. 115, 136.

nous croyons devoir rappelé est celle de Ptolémée ([1]) qui a donné $\pi = 3^{\circ}\ 8'\ 30''$; ce qui revient à prendre

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3\,600} = 3\,\frac{17}{120} = 3{,}1416.$$

Les géomètres romains semblent avoir employé, pour des calculs approchés, la valeur 3 et quelquefois aussi le nombre 4. Pour une plus grande approximation ils adoptaient souvent $3\,\frac{1}{8}$ au lieu de $3\,\frac{1}{7}$ à cause de l'avantage que présente la première fraction dans le système duodécimal. D'un autre côté, Gerbert ([2]) préconisait l'emploi de la fraction $\frac{22}{7}$.

Avant de parler des recherches faites par les mathématiciens européens du Moyen Age et des temps modernes, il n'est peut-être pas sans intérêt de résumer les résultats obtenus dans l'Inde et dans l'Orient.

Baudhayana ([3]) prenait $\frac{49}{16}$ pour valeur de π.

Arya-Bhata ([4]), vers 530, a donné pour valeur de π, $\frac{62\,832}{20\,000}$, fraction égale à 3,1416. Il a montré qu'en représentant par a le côté d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle ayant l'unité pour diamètre et par b le côté du polygone régulier inscrit de $2\,n$ côtés, on avait

$$b^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

([1]) *Almagest*, livre VI, chap. VII; édition Halma, vol. I, p. 421.

([2]) *Œuvres de Gerbert*, édition Olleris, Clermont, 1867, p. 453.

([3]) G. Thibaut. — Le *Sulvasutras*, *Asiatic Society of Bengal*, 1875. Art. 26-28.

([4]) *Leçons de calcul d'Aryabhata*, par L. Rodet, dans le *Journal Asiatique*, 1879, série VII, vol. XIII, pp. 10, 21.

Partant alors du côté de l'hexagone régulier inscrit, il calculait successivement les côtés des polygones réguliers inscrits de 12, 24, 48, 96, 192 et 394 côtés. Le périmètre de ce dernier polygone serait, d'après lui, égal à $\sqrt{9,8394}$, et il en déduit le résultat approché mentionné plus haut.

Brahmagupta [1], vers 650, a donné pour valeur approchée de π, $\sqrt{10}$, qui est égale à 3,1622... Il serait arrivé à cette valeur en inscrivant dans le cercle de diamètre 1, les polygones réguliers de de 12, 24, 48, 96 côtés, et en calculant successivement leurs périmètres qui étaient respectivement égaux à

$$\sqrt{9,65},\quad \sqrt{9,81},\quad \sqrt{9,86},\quad \sqrt{9,87}.$$

Il supposait que ces périmètres tendaient indéfiniment vers $\sqrt{10}$ lorsque le nombre des côtés des polygones réguliers inscrits augmente indéfiniment.

Bhaskara, vers 1150, donna deux valeurs approchées. L'une [2], empruntée, selon toute probabilité, à Arya-Bhata, mais qu'il annonce avoir calculée en appliquant la méthode d'Archimède jusqu'au polygone régulier de 384 côtés, est $\frac{3927}{1250}$, fraction égale à 3,1416 ; l'autre [3] est $\frac{754}{240}$, soit 3,1416666...

Chez les Arabes, nous trouvons les valeurs $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ et $\frac{62832}{20000}$ données par Alkhârizmi [4], vers 830, mais elles sont, sans aucun doute d'origine indienne. Il donne la première comme une valeur

(1) *Algebra... from Brahmegupta and Bhascara*, traduction H.-T. Colebrooke, Londres, 1817, chap. xii, art. 40, p. 308.

(2) *Ibid.*, p. 87.

(3) *Ibid.*, 95.

(4) *The Algebra of Mohammed ben Musa*, édition F. Rosen, Londres, 1831, 77-72.

approchée, la seconde comme étant employée par les géomètres et la troisième comme servant aux astronomes.

On prétend que les valeurs 3, $\frac{22}{7}$ et $\frac{157}{50}$ figurent dans les ouvrages chinois : les deux dernières sont probablement empruntées aux Arabes.

En revenant aux Mathématiciens du continent nous trouvons la suite des valeurs approchées de π énumérées ci-après. La plupart de ces résultats antérieurs au XVIII[e] siècle ont été originairement calculés en vue d'établir l'inexactitude de certaines quadratures données comme rigoureuses.

Léonard de Pise (1) au XIII[e] siècle, donna pour π la valeur $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ égale à 3,1418. Au XV[e] siècle, Purbach (2) donna ou mentionna la valeur $\frac{62832}{20000}$, qui est égale à 3,1416 ; Cusa pensait que la valeur exacte était donnée par l'expression $\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ qui nous fournit 3,1423... ; et on attribue à Regiomontanus (3), en 1464, la valeur 3,14243.

Viète (4), en 1579, démontra que π était plus grand que $\frac{31415926535}{10^{10}}$ et plus petit que $\frac{31415926537}{10^{10}}$. Il déduisait ce résultat du calcul des périmètres des polygones réguliers inscrit et

(1) BONCOMPAGNI. — *Scritti di Leonardo*, vol. II (*Practica Geometriæ*), Rome, 1862, p. 90.

(2) Appendice au *De Triangulis* de Regiomontanus, Basle, 1541, p. 131.

(3) Dans sa correspondance avec le cardinal Cusa *De quadratura circuli*, Nuremberg, 1533, dans laquelle il montre l'inexactitude du résultat de Cusa. Nous ne pouvons donner la référence exacte, mais les chiffres sont donnés par des écrivains compétents et sont, sans nul doute, corrects.

(4) *Canon Mathematicus seu ad Triangula*, Paris, 1579, pp. 56, 66 : cet ouvrage a probablement été imprimé pour un petit nombre de lecteurs, il est excessivement rare.

circonscrit de 6×2^{16} côtés, obtenus en appliquant successivement la formule $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 1 - \cos \theta$. Il a donné également [1] un résultat équivalent à la formule :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots\cdots$$

Le père d'Adrien Métius [2], en 1585, donna la fraction $\frac{355}{113}$ qui est égale à 3,14159292, valeur exacte jusqu'à la sixième décimale, C'est le résultat vraiment curieux d'une supposition heureuse, car tout ce qu'il est arrivé à démontrer est que π est compris entre $\frac{377}{120}$ et $\frac{333}{106}$; partant de là il se crut autorisé à formuler cette conclusion que la valeur exacte de π s'obtenait en formant une nouvelle fraction dont le numérateur et le dénominateur étaient les moyennes des numérateurs et des dénominateurs des deux premières.

En 1593, Adrien Romanus [3] calcula le périmètre du polygone régulier inscrit de 1073741824 côtés (c'est-à-dire 2^{30}) et il en déduisit une valeur de π approchée jusqu'à la quinzième décimale.

L. Van Ceulen consacra une partie de son existence à l'étude de la question. En 1596 [4], il fit connaître un résultat exact jusqu'à la vingtième décimale calculé au moyen des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit de 60×2^{33} côtés, obtenus en

(1) *Vietæ opera*, édition Schooten, Leyde, 1646, p. 400.

(2) A. Metius. — *Arithmeticae libri duo et Geometricæ*, Leyde, 1826, pp. 88, 89 (l'édition originale date probablement de 1611).

(3) *Ideæ Mathematicæ*, Anvers, 1593 ; livre très rare qu'il ne nous a pas été possible jusqu'ici de consulter.

(4) *Vanden Circkel*, Delf., 1596, fol. 14, p. 1 ; ou *De circulo*, Leyde, 1619, p. 3.

appliquant successivement un théorème qui lui appartient et qui conduit à la formule :

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A.$$

Nous avons en notre possession une estampe finement exécutée, datant de cette époque, qui le représente, avec le résultat mentionné plus haut inscrit autour d'une circonférence tracée sous le portrait. Il mourut en 1610, et, suivant ses instructions, la valeur de π avec 35 décimales (qui représentait le résultat de ses dernières recherches) fut gravée sur son tombeau [1] à Leyde dans l'église de Saint-Pierre. Dans son arithmétique posthume [2] on trouve la valeur de π avec 32 décimales ; résultat obtenu en calculant le périmètre d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est 2^{62}, c'est-à-dire 4611686018427387904. Van Ceulen forma également une table des périmètres d'un certain nombre de polygones réguliers.

Willebrord Snellius [3], en 1621, obtint au moyen du polygone de 2^{30} côtés une valeur approchée jusqu'à la trente-quatrième décimale. Cette approximation est un peu plus faible que celle de Van Ceulen, mais la méthode de Snellius est de beaucoup préférable car il obtient ces 34 décimales au moyen d'un polygone qui n'avait fourni à Van Ceulen que 14 (ou peut-être 16) décimales exactes. De même Snellius parvint avec l'hexagone régulier à une approximation aussi grande que celle obtenue par Archimède avec le polygone régulier de 96 côtés, tandis que ce dernier polygone lui

(1) Cette inscription est mentionnée par le professeur De Haan dans le *Messenger of Mathematics*, 1874, vol. III, p. 25.

(2) *De Arithmetische en geometrische Fondamenten*, Leyde, 1615, p. 163 ; ou p. 144 de la traduction latine de W. Snellius, publiée à Leyde en 1615 sous le titre *Fundamenta arithmetica et geometrica*. Cet ouvrage fut réédité avec une traduction latine de *Vanden Circkel*, en 1619, sous le titre *De circulo ;* voir ce dernier ouvrage aux pp. 3, 29-32, 92.

(3) *Cyclometricus*, Leyde, 1621, p. 55.

donnait une valeur de π avec 7 décimales exactes, au lieu de deux comme l'avait trouvé Archimède. En voici la raison : Archimède, après avoir calculé les côtés des polygones réguliers inscrit et circonscrit de n côtés, supposait que la longueur de la n^{me} partie de la circonférence était comprise entre ces deux côtés ; tandis que Snellius déduisait de ces deux côtés deux autres lignes qui constituaient des limites plus resserrées entre lesquelles l'arc se trouvait compris. Sa méthode repose sur le théorème traduit par la double inégalité :

$$\frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} < \theta < 2 \sin \frac{1}{3} \theta + \tang \frac{1}{3} \theta ;$$

son application conduit à une valeur de π exacte jusqu'à la décimale dont le rang est marqué par la partie entière de $(4 \log. n - 0{,}2305)$; approximation deux fois plus grande que celle donnée par la règle ancienne. La démonstration que présente Snellius de son théorème est erronée, bien que le résultat soit exact.

Snellius construisit une table (1) des périmètres de tous les polygones réguliers inscrits et circonscrits dont le nombre des côtés est compris dans la forme générale 10×2^n, n variant de 3 à 19. Beaucoup des résultats donnés sont empruntés à Van Coulen, mais quelques-uns furent calculés de nouveau. Cette table servit utilement pour réfuter certaines quadratures. James Gregory (2) publia également une semblable liste.

En 1630, Grienberger (3) en se servant du théorème de Snellius poussa l'approximation jusqu'à la trente-neuvième décimale. C'est le dernier des mathématiciens qui appliqua la méthode classique consistant à calculer les périmètres d'un certain nombre de poly-

(1) Elle est mentionnée par Montucla, édition 1831, p. 70.

(2) *Vera circuli et Hyperbolæ quadratura*, prop. 29, mentionné par Huygens, *Opera Varia*, Leyde, 1724, p. 447.

(3) *Elementa Trigonometrica*; Rome, 1630, à la fin de la Préface.

gones réguliers inscrits et circonscrits. Une plus grande approximation ne serait d'aucune utilité pratique. Des démonstrations des théorèmes employés par Snellius et par d'autres géomètres, en appliquant cette méthode, se trouvent dans un ouvrage de Huygens (1) qui doit être considéré comme renfermant toute l'histoire de la méthode.

En 1656 Wallis (2) démontra que :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.}{1.3.3.5.5\ 7...},$$

et signala une proposition donnée quelques années plus tôt par le vicomte Brouncker établissant que l'on avait :

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}$$

mais aucun de ces théorèmes n'a été employé pour donner une plus large extension aux calculs.

Les géomètres qui suivirent utilisèrent les propriétés des séries convergentes et en déduisirent une méthode dont l'application aurait été bien difficile avant l'invention du calcul des séries, bien que Descartes (3) eût fait connaître un procédé géométrique équi-

(1) *De Circuli magnitudine Inventa*, 1654; *Opera Varia*, pp. 351-387. Les démonstrations se trouvent dans l'ouvrage de G. Pirie. — *Geometrical methods of approximating to the value of* π, Londres, 1877, pp. 21-23.

(2) *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656, prop. 191. Une analyse des recherches de Wallis a été donnée par Cayley dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, 1889, vol. XXIII, pp. 165-169.

(3) Voir un mémoire d'Euler dans le *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum*, Saint-Pétersbourg, 1763, vol. VIII, pp. 157-168.

valent à l'emploi de telles séries. L'usage des séries indéfinies a été proposé par James Grégory [1] qui démontra la relation :

$$\theta = \text{tang}\theta - \frac{1}{3}\text{tang}^3\theta + \frac{1}{5}\text{tang}^5\theta - \ldots..$$

dans laquelle θ doit être compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{4}\pi$.

Le premier mathématicien qui se servit de la série de Grégory pour obtenir une valeur approchée de π fut Abraham Sharp [2] qui, en 1699, conseillé par Halley, poussa le calcul jusqu'à 72 décimales (dont 71 sont exactes). Il obtint ce résultat en posant $\theta = \frac{1}{6}\pi$ dans la série de Grégory.

Machin [3], avant 1706, donna une valeur de π avec 100 décimales exactes, calculée au moyen de la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{ arc tg } \frac{1}{239}.$$

De Lagny [4], en 1719, obtint une valeur avec 127 décimales (dont 112 exactes) en faisant $\theta = \frac{\pi}{6}$ dans la série de Grégory.

(1) Voir la lettre à Collins, datée du 15 février 1671, imprimée dans le *Commercium Epistolicum*, Londres, 1712, p. 25, et dans la collection Macclesfield, *Correspondence of scientific Men of the Seventeenth Century*, Oxford, 1841, vol. II, p. 216.

(2) Voir *Life of A. Sharp*, par W. Cudworth, Londres, 1889, p. 170. Le travail de Sharp figure dans l'un des discours préliminaires (p. 53 et seq.) annexés aux *Mathematical Tables* de H. Sherwin. Ces tables furent publiées à Londres en 1705 : les discours furent probablement publiés à la même époque, bien que les plus anciennes copies que nous en ayons vues portent la date de 1717.

(3) W. Jones. — *Synopsis Palmariorum* de Londres, 1706, p. 243 ; et Maseres. — *Scriptores Logarithmici*, Londres, 1796, vol. III, p. 7-9, 155-164.

(4) *Histoire de l'Académie* pour 1719, Paris, 1721, p. 144.

Hutton [1], en 1776, et Euler [2], en 1779, préconisèrent l'emploi de l'une ou l'autre des formules $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3}$,

ou $$\frac{\pi}{4} = 5 \text{ arc tg } \frac{1}{7} + 2 \text{ arc tg } \frac{3}{79}.$$

Mais ni l'un ni l'autre ne poussèrent l'approximation aussi loin que leurs prédécesseurs.

Vega, en 1789 [3], donna la valeur de π avec 143 décimales (dont 126 sont exactes); et, en 1794 [4], avec 140 décimales (dont 136 exactes).

Vers la fin du siècle dernier, le baron Zach trouva dans la bibliothèque Radcliffe, à Oxford, un manuscrit, dont l'auteur était inconnu, et qui donnait la valeur de π avec 154 décimales (dont 152 étaient exactes).

En 1841, Rutherford [5] calcula π avec 208 décimales (152 exactes), au moyen de la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tg } \frac{5}{70} - \text{arc tg } \frac{1}{70} + \text{arc tg } \frac{1}{99}.$$

En 1844, Dase [6] trouva π avec 205 décimales (200 exactes) en partant de la formule $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{5} + \text{arc tg } \frac{1}{8}$.

(1) *Philosophical Transactions*, 1776, vol. LXVI, pp. 476-492.
(2) *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanæ* pour 1793, Saint-Pétersbourg, 1798, vol. XI, pp. 133-149; le mémoire fut lu en 1779.
(3) *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanæ* pour 1790, Saint-Pétersbourg, 1795, vol. IX, p. 41.
(4) *Thesaurus Logarithmorum* (*logarithmisch-Trigometrischer Tafeln*), Leipzig, 1794, p. 633.
(5) *Philosophical Transactions*, 1841, p. 283.
(6) *Journal de Crelle*, 1844, vol. XXVII, p. 198.

En 1847, Clausen [1] poussa l'approximation jusqu'à 250 décimales (248 exactes) en calculant π au moyen des deux formules :

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arc. tg } \frac{1}{3} + \text{arc. tg } \frac{1}{7}, \quad \frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc. tg } \frac{1}{5} - \text{arc. tg } \frac{1}{239},$$

En 1853, Rutherford [2] poussa sa première approximation jusqu'à 440 décimales (toutes exactes) et William Shanks alla jusqu'à 530 décimales. Ces 530 décimales se trouvent également reproduites dans les tables d'intégrales définies de Bierens de Haan (Amsterdam 1858-1867). La même année, Shanks fit connaître une nouvelle valeur de π calculée avec 607 décimales [3]. Dans les Proceedings of the Royal Society of London, 1872-73, Vol. XXI, p. 318, la valeur de π est donnée avec 707 chiffres décimaux, mais on a découvert que trois décimales étaient fausses ; la valeur corrigée avec 707 décimales a été donnée dans le Vol. XXII, p. 45, dans une communication de William Shanks, lue par le professeur G. G. Stokes, le 13 octobre 1873. Ces 707 décimales ont été rééditées tout récemment dans le *Zeitschrift* d'Hoffmann, 1895, T. XXVI, p. 263, avec une réimpression textuelle d'un article de W. Shanks, daté du 14 avril 1873, et une courte esquisse biographique de cet infatigable calculateur.

La formule employée pour cette évaluation du nombre π est celle de Machin.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{1}{239}.$$

En 1853, Ritcher, ignorant probablement les résultats obtenus jusqu'alors par les géomètres anglais, trouva une valeur de π avec 333 décimales [4] (dont 330 sont exactes) ; son approximation fut

(1) Schumacher. — *Astronomische Nachrichten*, vol. XXV, col. 207.

(2) *Proceedings of the Royal Society*, 20 janvier 1853, vol. VI, pp. 273-275.

(3) *Contributions to Mathematics*, W. Shanks, Londres, 1853, pp. 86-87.

(4) *Archiv. de Grunert*, vol. XXI, p. 119.

poussée jusqu'à 400 décimales, en 1854 ([1]), et jusqu'à 500 décimales en 1855 ([2]).

De toutes les séries ou formules qui ont été employées pour calculer ces valeurs approchées de π, celles de Machin et de Dase sont peut-être les plus simples et les plus commodes. Signalons deux séries dont la convergence est rapide

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5.2^5} + \ldots..$$

et

$$\frac{\pi}{4} = 2 + 22 \operatorname{arc tg} \frac{1}{28} + \operatorname{arc tg} \frac{1}{443} - 5 \operatorname{arc tg} \frac{1}{1\,393} - 10 \operatorname{arc tg} \frac{1}{11\,018},$$

cette dernière est due à M. Escott ([3]).

Les résultats qui précèdent se trouvent résumés dans le tableau de la page suivante.

Pour retrouver π avec un nombre de décimales plus que suffisant pour les calculs les plus approchés que l'on puisse avoir à faire, il suffit d'écrire la phrase ci-dessus qui se retient facilement lorsqu'on l'a lue une fois

Que	j'aime	à	faire	apprendre	un	nombre	utile	aux	sages
3	1 4	1	5	9	2	6	5	3	5

en comptant le nombre des lettres qui entrent dans chaque mot et en écrivant les totaux dans l'ordre où on les trouve, on obtient le nombre π avec ses 10 premières décimales.

Puisque nous sommes en si bonne voie citons le quatrain mné-

([1]) *Archiv. de Grunert.* Vol. XXIII, p. 476 : l'approximation donnée dans le vol. XXII, p. 473, n'est exacte que pour les 330 premières décimales.

([2]) *Ibid.* Vol. XXV, p. 472 ; et Elbinger Anzeigen, n° 85.

([3]) *Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris, Décembre 1896, Vol. III. p. 276.

Dates	Noms des calculateurs	Nombre des décimales calculées	Nombre des décimales exactes
250 A.-J.	Archimède	2	2
1464	Regiomontanus	3	3
»	Les astronomes indiens	3	3
1580	J. Rheticus	8	8
1585	Pierre Metius	8	8
1579	Viète	11	11
1596	Lud. Van Ceulen	20	20
1597	Adrien Romanus	16	16
1610	Lud. Van Ceulen	36	36
1615	Lud. Van Ceulen	32	32
1621	Snell	35	35
1705	Abr. Sharp	72	71
1706	Machin	100	100
1719	De Lagny	127	112
1789	Vega	143	126
1794	Vega	140	136
»	(inconnu)	154	152
1841	Rutherford	208	152
1844	Dahse	205	200
1847	Clausen	250	248
1853	Shanks	318	318
1853	Rutherford	440	440
1853	Shanks	530	»
1853	Shanks	607	»
1853	Richter	333	330
1854	Richter	400	330
1854	Richter	400	400
1855	Richter	500	500
1873	Shanks	707	

monique suivant (en pitoyables vers d'ailleurs) qui permet de retrouver les 32 premiers chiffres de π :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

Ce quatrain a été publié dans le tome V, 1879 de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, p. 449 d'après une communication de Radicke, empruntée à l'*Illustrirte Zeitung*. Le même quatrain est rapporté dans les *Problèmes de géométrie* de Laisant et Elie Perrin (Paris 1894), p. 42 et les auteurs ajoutent, comme l'avait fait Catalan (loc. cit.) : « la 32ᵉ décimale [1] est un zéro ce qui empêche d'étendre davantage ce procédé mnémotechnique »,

Dans l'ouvrage d'Aimé Paris intitulé *Principes et applications diverses de la Mnémotechnie* (2 vol. in-8°, Paris 1834), on trouve à la page 676, le moyen d'apprendre le nombre π avec 154 décimales [2].

La valeur de $\frac{1}{\pi}$ se retient par un procédé analogue en faisant un emprunt à l'histoire.

Les révolutions ont été assez fréquentes en France.

La révolution de 1830 a succédé à celle de 89.

Les trois journées de 1830 ont précédé 89 à l'envers

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318\,3098.$$

(1) On a imprimé par erreur 31ᵐᵉ.

(2) A l'Ecole polytechnique, tous les élèves connaissent le moyen mnémotechnique de retenir les premiers chiffres de la partie décimale de π. On dit *un quatre* et *un cinq* font *neuf*.

L'expression *faire deux pi* signifie décrire une circonférence et, par extension, faire le tour complet de la cour. *Faire pi*, c'est faire une moitié de tour. *Faire pi sur deux*, c'est profiter du sommeil d'un camarade pour le redresser verticalement sur son lit.

Pour la plupart des cas, les 3 journées de 1830 suffisent pour rappeler les premiers chiffres 3 1830 de la partie décimale.

Enfin disons qu'on a trouvé pour e la phrase suivante :

Tu aideras à rappeler ta quantité à beaucoup de docteurs amis
$e = 2,7\ 1\ 8\ 2\ 8\ 1\ 8\ 2\ 8\ 4$

On peut aussi obtenir expérimentalement une valeur approchée de π au moyen de la théorie des probabilités. A cet effet après avoir tracé sur un plan un certain nombre de droites parallèles distantes les unes des autres d'une même quantité constante a, on laisse tomber sur ce plan une petite tige de longueur l (l étant moindre que a). La probabilité qu'elle tombera de façon à couper une des parallèles est exprimée par $\frac{2l}{\pi a}$ (1). Si l'expérience est reprise plusieurs centaines de fois, le rapport du nombre des cas favorables R au nombre total des chutes N sera sensiblement égal à cette fraction, $\frac{R}{N} = \frac{2l}{\pi a}$ d'où résulte $\pi = \frac{2Nl}{Ra}$.

Le *Magasin pittoresque* de 1838 (p. 300) rappelle ce procédé en prenant pour exemple $l = 50$ millimètres, $a = 63^{mm},6$, et ajoute dans le même article que le choix de ces longueurs (ou plutôt de leur rapport) est tel que sur un nombre de coups déterminé on a ainsi le plus de chance d'obtenir *la plus grande approximation possible*. F. Robellaz a examiné la question dans l'*intermédiaire des Mathématiciens* et a démontré que, contrairement à l'affirmation ci-dessus, ces conditions se trouvent réalisées lorsque la longueur de la tige est égale à l'équidistance des parallèles (2).

Citons quelques résultats obtenus par cette méthode ; en 1855. En 1855, M. A. Smith (3) d'Aberdeen fit 3 204 essais et en déduisit

(1) Voir l'ouvrage de J. Richard. *Sur la philosophie des Mathématiques*. Paris 1903, pp. 157-161.

(2) *Intermédiaire des Mathématiciens*, T. II, 1895, pp 45-47.

(3) A. de Morgan. — *Budget of Paradoxes*, Londres, 1872, pp. 171-172 (extrait d'un article de De Morgan publié en 1861).

$\pi = 3,1553$. Un élève du Prof. De Morgan (1), trouva $\pi = 3,137$ après 600 essais. En 1864, le capitaine Fox recommença 1 120 fois l'expérience avec quelques précautions additionnelles, et obtint la valeur moyenne $\pi = 3,1419$.

D'autres méthodes semblables permettent d'obtenir π avec une certaine approximation. On sait par exemple que la probabilité que deux nombres écrits au hasard soient premiers entre eux a pour expression $\frac{6}{\pi^2}$; comme cas particulier à citer (2) 50 élèves furent invités à écrire chacun au hasard 5 couples de nombres et, ceci fait, on constata que sur les 250 couples écrits, 154 étaient constitués par des nombres premiers entre eux. Il résultait de là l'égalité

$$\frac{6}{\pi^2} = \frac{154}{250} \quad \text{d'où} \quad \pi = 3,12.$$

Plusieurs géomètres ont présenté, pour la rectification approchée de la circonférence, quelques constructions, dont quelques-unes sont très ingénieuses. Nous donnerons les principales.

Remarquons d'abord qu'on obtient une valeur de π avec deux décimales exactes en remplaçant la demi-circonférence par la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrit.

En prenant le rayon pour unité, la somme des valeurs de ces deux côtés a pour expression

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = 1,73205 + 1,41421 = 3,141626\ldots$$

au lieu de

$$\pi = 3,14159.$$

La valeur ainsi obtenue est donc par excès avec une erreur absolue plus petite que 0,005.

(1) *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1873, vol. II, p. 113-114.

(2) Note sur π, par R. Chartres. *Philosophical Magazine*, Londres, série 6, vol. XXXIX, mars 1904, p. 315.

Citons encore l'expression indiquée par Cantor dans le *Gesch. der Mathem.*

$$\frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 2 + \frac{1}{10} - \frac{1}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3}$$

et due à Gergonne (A. G. Tome VIII), elle donne la valeur de π avec 9 décimales exactes.

Construction de Specht [1]. — Soit OA le rayon d'une circonférence de centre O ; sur la tangente indéfinie en A on prend à partir de ce point, des longueurs AB, BC, CD respectivement égales au double, au cinquième et aux $\frac{2}{5}$ du rayon. On trace les droites OC, OD, et l'on prend sur AO et dans le sens AO, une longueur AE égale à OC. Enfin on mène par le point E une parallèle à OD, jusqu'à son intersection en F avec la tangente AB. La droite AF est très approximativement égale à la circonférence.

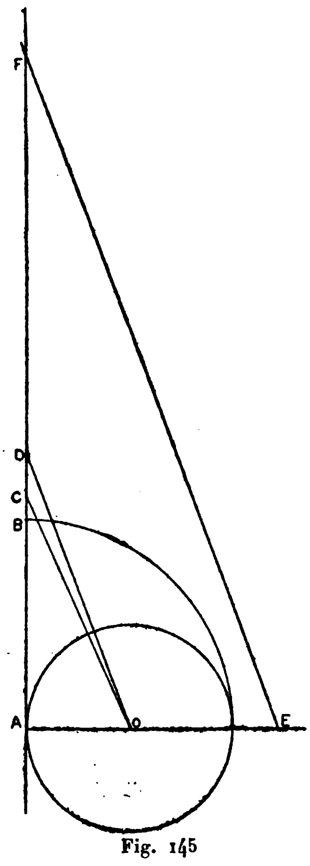


Fig. 145

On a, en effet, en prenant le rayon pour unité

$$OC = \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2},$$

donc

$$AE = \frac{\sqrt{146}}{5}.$$

(1) Procédé indiqué par Specht dans le *Journal de Crelle* (T. III, p. 83-1836. Specht a donné une autre solution encore plus approchée, mais beaucoup moins simple.

D'autre part

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AO}, \quad \text{d'où } AF = AE.\frac{13}{5}$$

ou

$$AF = 2 \times 3{,}1415919.$$

La différence de $\frac{1}{2}$ AF avec π est plus petite que 0,0000007, par conséquent pour une circonférence de 7 000 kilomètres de rayon (le rayon de la terre est de 6 366 kilomètres), l'erreur commise sur la circonférence n'atteint pas 1 mètre.

La différence entre la surface du cercle et celle du triangle AOF est moindre que 1 millimètre carré.

Construction attribuée au jésuite polonais Koskanski. — Aux deux extrémités d'un diamètre AB, on élève dans le même sens deux perpendiculaires, l'une AC égale au $\frac{1}{3}$ du côté du triangle équilatéral inscrit et l'autre BD égale à 3 fois le rayon. La droite de jonction DC donne la demi-circonférence rectifiée à 0,0001 près

$$DC = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

Construction Terquem (1). — On trace le diamètre AB et le rayon perpendiculaire OR, puis on mène la tangente indéfinie en B. A partir de R on porte le rayon en RS et on trace OST qui dé-

(1) *Manuel d'applications mathématiques*. C'est la construction Koskanski présentée sous une autre forme.

On a également donné cette troisième variante : la demi-circonférence est sensiblement égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont 2R et 3R — *a*, *a* étant le demi côté de l'hexagone régulier circonscrit.

termine le point T sur la tangente en B ; enfin on prend TD = 3

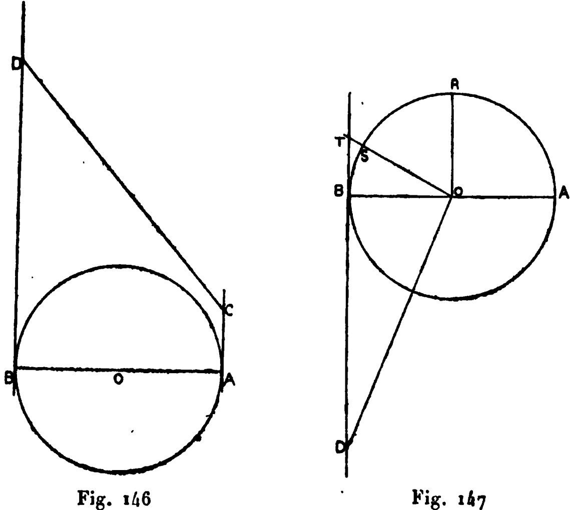


Fig. 146 Fig. 147

fois le rayon et on mène DA qui représente sensiblement la demi-circonférence.

On voit, en effet, que

$$TB = \frac{1}{2} TO = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

et que

$$BD = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Alors

$$AD = \sqrt{4 + BD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 2\sqrt{3}}.$$

F. Bretschneider d'Eisenstadt partant de ce fait que l'expression

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

représente le nombre π avec 9 décimales exactes indique dans les Archives de Grunert [1] une nouvelle construction assez simple.

Si l'on prend seulement la partie

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = 3,14159\ldots$$

on obtient π avec 5 décimales seulement, approximation très suffisante.

Or, si l'on observe que $146 = 11^2 + 5^2$, on est conduit à construire une ligne x telle que

$$\frac{x}{13} = \frac{\sqrt{11^2 + 5^2}}{50}.$$

de Longchamps a proposé la construction suivante [2].

Le diamètre AB de la circonférence ayant été partagé en 10 par-

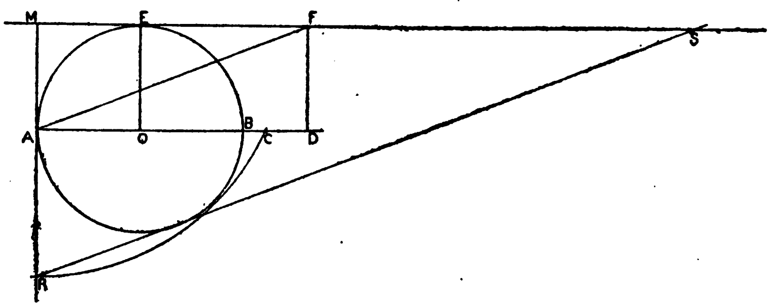


Fig. 148

ties égales on porte 3 de ces divisions sur le prolongement de AB, ce qui donne les points C, D.

On mène le rayon OE perpendiculaire à AB et on trace les tangentes indéfinies en A et en E ; ces tangentes se coupent en M. De

(1) *Arch. der Mathematik und Physik*, 1886, p. 447.
(2) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1886, p. 137.

ce point comme centre avec MC pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe en R la tangente en A. Enfin on achève le rectangle MADF et par R on mène la parallèle RS à AF. On a :

$$\frac{MR}{MA} = \frac{MS}{MF} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{11^2 + 5^2}}{5} = \frac{MS}{MF} = \frac{MS}{13},$$

d'où

$$MS = \frac{13}{5}\sqrt{11^2 + 5^2} = 10\,x.$$

Dans une communication présentée à la société mathématique de France, Bioche observant comme nous l'avons fait remarquer plus haut que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1463 = \pi + 0,0047$$

en déduisait un procédé approché de rectification consistant à construire géométriquement $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et à ajouter les segments obtenus.

D'Ocagne a fait connaître une construction directe [1].

Dans le cercle de diamètre AA′ on trace le rayon OB incliné à 45° sur OA′ et par B on mène la parallèle à AA′ qui coupe en C la tangente indéfinie en A′.

La bissectrice de l'angle COA coupe en D cette même tangente et

$$A'D = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Voici enfin une dernière rectification.

De l'extrémité C d'un diamètre quelconque on décrit avec une ouverture de compas égale au rayon un arc de cercle qui détermine la corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit. On prend sur le diamètre prolongé et à partir du point M, la longueur MD

[1] *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1895, p. 77.

égale à 2AB. Sur DB on porte DP égal au double du rayon et la longueur PB représente approximativement $\frac{1}{2}\pi$.

$$MB = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ DM = 2\sqrt{3},\ DB = \sqrt{\frac{3}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{51},$$

$$PB = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2, \qquad 2BP = 3{,}1414284\ldots$$

Quand on a en vue la quadrature du cercle, on peut la réaliser approximativement par l'un des procédés suivants ;

Construction Willich (1). — Soit dans un cercle O la corde AB égale au rayon. On prend les milieux E et C de cette corde et de l'arc sous-tendu, puis à partir de C on porte deux fois le rayon de C en D ; enfin on trace la corde DEF. Cette corde est sensiblement égale au côté du carré équivalent au cercle. L'arc AD vaut $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ de la circonférence. Cette corde représente donc le côté du carré inscrit et l'angle AOD est droit.

Si on abaisse la perpendiculaire AH sur BD, on a $AH = \frac{1}{2}AD$ et il est, par suite facile, de calculer la corde DB.

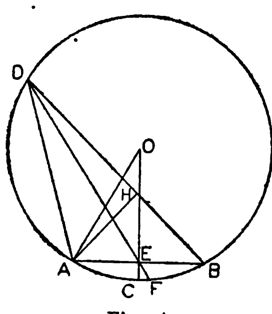


Fig. 149

On calcule ensuite la médiane DE du triangle ADB, puis le segment EF par la proportion

$$DE \,.\, EF = \overline{AE}^2.$$

On trouve ainsi

DF = 1,77198 au lieu de 1,77245.

Voici deux autres constructions.

On trace un diamètre AB et la tangente indéfinie en A. On prend

(1) *Nouvelles Annales* Tome XV, p. 224.

sur OB la longueur OC égale au $\frac{1}{6}$ du rayon et du point C comme centre avec une ouverture de compas égale au double du diamètre on décrit un arc de cercle qui coupe la tangente en D. On trace enfin la sécante DB qui coupe la circonférence en E et la corde AE représente approximativement le côté du carré équivalent au cercle.

On trouve AE = 1,7724502 au lieu de 1,7724538.

Sur deux diamètres rectangulaires on porte, à partir du centre O, les 4 longueurs OA, OB, OC, OD égales aux $\frac{5}{4}$ du rayon ; la surface du carré

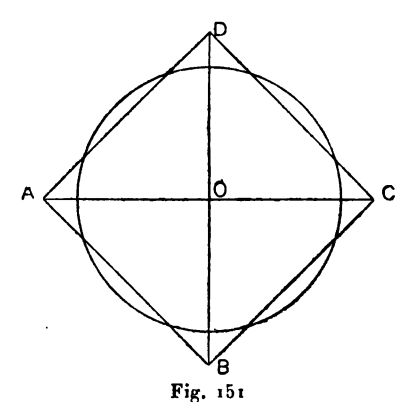


Fig. 150

Fig. 151

ABCD est à peu près égale à celle du cercle (1).

AB = 1,768 au lieu de 1.772.

Construction donnée par Périgal (2). — Soit AB le côté

(1) Cette construction et la précédente sont dues, croyons-nous, à Sonnet.
(2) *The Messenger of mathematics*, vol. IV, 1875, p. 71.

de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle O. On trace le diamètre perpendiculaire MOC, et du point A comme centre avec une ouverture de compas égale au côté du carré inscrit, on trace un arc de cercle qui coupe COM en D. Enfin on porte DA en DG sur le diamètre DOC et CG représente approximativement le côté du carré équivalent au cercle.

$$OE = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad ED = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

$$CG = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) = 1,7746874$$

au lieu de 1,7724539.

Donnons enfin cette dernière construction.

Sur le diamètre AB du cercle donné on prend le segment OD = les $\frac{3}{5}$ du rayon et, dans le sens opposé. le segment OF égal trois fois la moitié du rayon. Soit E le milieu de OB. Sur

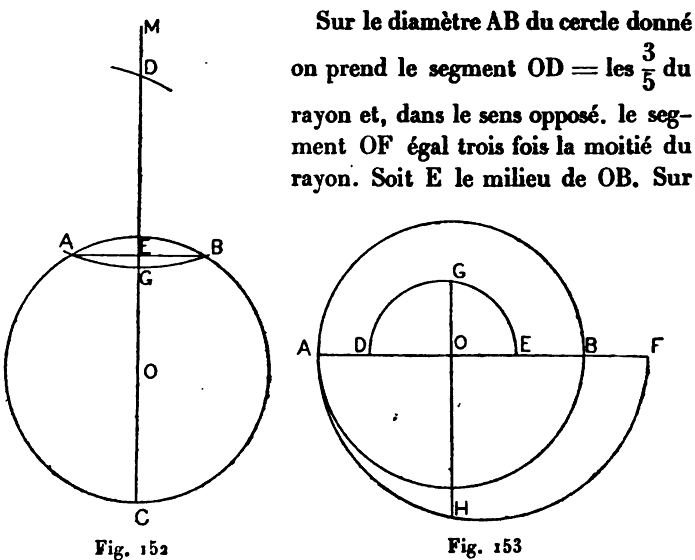


Fig. 152 Fig. 153

DE et AF comme diamètres, on décrit de part et d'autre de AB des demi-circonférences qui coupent en G et H le diamètre élevé perpendiculairement à AB.

Le carré construit sur GH est équivalent très approximativement au cercle.

$$OD = \frac{3}{5}, \quad OF = \frac{3}{2}, \quad OE = \frac{1}{2}, \quad OA = 1$$

$$\overline{OG}^2 = OE.OD = \frac{3}{10},\ OG = \sqrt{\frac{3}{10}};\ \overline{OH}^2 = OA.OF = \frac{3}{2},\ OH = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$GH = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} = 1{,}77246\ldots..$$

au lieu de 1,77245.....

Terminons ce chapitre en consacrant quelques pages aux géomètres qui prétendent avoir trouvé la quadrature du cercle. Ils sont légion et nous ne pouvons songer à les citer tous ou à résumer leurs recherches, nous nous bornerons aux principaux.

Dans sa célèbre Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, Montucla s'exprime ainsi :

« J'ai donné dans le cours de cet ouvrage, le nom de quadrateurs « à ces hommes qui, pour la plupart, à peine initiés dans la géomé- « trie, entreprennent de quarrer le cercle ou s'obstinent à main- « tenir d'absurdes paralogismes pour une solution légitime de ce « problème..... Si l'erreur grossière, et presque volontaire, n'était « punie que de l'obscurité et de l'oubli, ce châtiment léger serait « trop peu capable de retenir les nombreux imitateurs de ceux dont « je parle, ils deviendront peut-être plus circonspects en voyant le « mépris et l'espèce de tache qui accompagnent les noms de ceux « dont ils suivent les traces [1] ».

L'espoir que manifestait Montucla ne s'est pas réalisé : chaque année de pauvres esprits, qui n'ont certainement pas les premières notions des choses dont ils parlent, avancent, aux Académies et au public [2], qu'ils ont trouvé le *rapport exact* de la circonférence au

(1) *Histoire des recherches*, etc. Nouvelle édition (de Lacroix) pp. 200-201.

(2) Dès 1831, Lacroix disait « Les choses ne sont pas changées depuis la publication de Montucla. Sans cesse de nouveaux quadrateurs assiègent les corps savants, avec des paralogismes plus ou moins grossiers, mais qu'ils

diamètre ! Bien entendu ce rapport *exact* diffère pour chaque inventeur et est ordinairement fautif dès la deuxième décimale.

En France, l'Académie des Sciences a pris, depuis longtemps, le bon parti de ne pas plus s'occuper des Mémoires qui traitent de cette question, que de ceux qui ont pour but la recherche du mouvement perpétuel. (1)

Les géomètres de l'antiquité furent pour ainsi dire tous atteints de la fureur de la quadrature. Au nombre des plus ardents se trouvait Méton, célèbre par son cycle et Aristophane, le Molière des Athéniens, le tourne en ridicule sur la scène, à ce sujet. (2)

Le cardinal de Cusa est le premier des *Alchimistes-géomètres* modernes. Il s'imaginait avoir trouvé la quadrature du cercle, en faisant rouler un cercle ou un cylindre sur un plan, jusqu'à ce qu'il eût décrit toute sa circonférence ; mais il fut convaincu d'erreur par Régiomontanus. Après lui, vers le milieu du XVIe siècle, un professeur royal de Mathématiques, Oronce Fine s'illustra encore par ses singuliers paralogismes. Voici ce qu'il dit en substance :

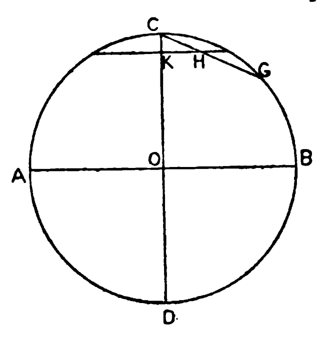


Fig. 154

Soit un cercle O dont AB et CD sont deux diamètres rectangulaires ; on joint le point C au milieu G de l'arc CB, et on divise cette droite CG en moyenne et extrême raison, GH étant le plus grand segment. Par H on mène à AB la parallèle HK qui rencontre

soutiennent toujours, avec un entêtement et une jactance invincibles ». (*Histoire*, etc., p. 20).

Suivant une remarque malicieuse d'Arago, la *quadrature du cercle est* une maladie qui sévit, surtout au printemps.

(1) Voyez ses mémoires, année 1775, hist., p. 61.

(2) Aristophane, — *Les Oiseaux*.

CD en K : la longueur OK est le demi-côté du carré équivalent au cercle (1).

En supposant exacte cette quadrature de Fine, on trouverait pour π une valeur supérieure à 3,4 (2).

Charles de Bovelles, chanoine de Noyon, donne également la construction suivante (3).

On trace dans le cercle E les deux diamètres rectangulaires BED, CEA ; on partage le rayon EA en 4 parties égales et l'on porte l'une des divisions en AH sur son prolongement. Puis du point H comme centre avec une ouverture de compas égale à HB, on décrit un arc

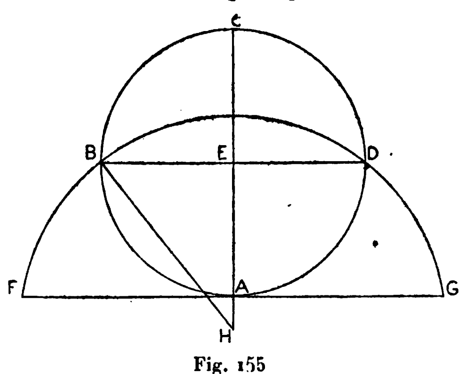


Fig. 155

de cercle qui coupe en F et G la tangente indéfinie menée en A au cercle considéré.

De Bovelles ajoute alors : « Je dy doncques que la ligne AG sera esgale à la quarte partie de la circonférence, et aussi de l'autre costé la ligne AF. »

(1) *Ærontii Finœi Delphinatis, Regii Mathematicarum professoris, De rebus mathematicis*, etc. (Lutetiœ Parisiorum, Anno Christi Servatoris MDLVI) Liber Secundus, p. 72 et 73.

(2) Nous empruntons ces renseignements à un charmant ouvrage de G. Maupin. *Opinions et curiosités touchant la Mathématique*. Paris 1898.

(3) La Géométrie Pratique, composée par le noble philosophe maistre Charles de Bovelles. Paris, 1542.

Cette quadrature suppose que l'on prenne $\pi = \sqrt{10}$.

L'un des commentateurs du P. Leurechon [1] donne une quadrature du cercle, qui est basée sur le théorème suivant : si dans un triangle rectangle l'hypoténuse vaut $\frac{156}{43}$ R et qu'un des angles soit de 30°, le grand côté de l'angle droit est égal à πR. Un autre commentateur démontre dans le même livre la fausseté de cette proposition, qui paraît due à Longomontanus [2] et il s'exprime ainsi : « n'en déplaise à ce nouveau cyclomètre, ny à son prétendu traicté des Curvilignes, c'est avoir le jugement curviligne que d'admettre telles absurdités. Si cette faulse monnoye prend cours en Danemarck, la France, ou du moins Paris, ne la élèvera jamais, ou bien elle n'y aura cours que parmy les ignorans ».

Cette quadrature donne pour π une valeur comprise entre 3,1418 et 3,1419 [3].

La Hollande a fourni un grand nombre de quadrateurs. Le premier en date est Simon Vander Eycke, appelé aussi *Simon Duchesne* ou *Simon a Quercu*. En 1584, il publia la *quadrature du cercle*, dans laquelle il prétend démontrer que

$$\pi = \frac{1521}{484} = \left(\frac{39}{22}\right)^2$$

ou que le rapport entre le côté du carré équivalent à un cercle et le rayon du cercle, est rigoureusement égal à $\frac{39}{22}$. Il se basait sur le théorème suivant :

Si de l'extrémité D du diamètre BD d'un cercle, on mène une tangente DF et que de l'autre extrémité B on tire une ligne droite

(1) Le P. Leuréchon jésuite, confesseur de Charles IV de Lorraine (de 1591 ? à 1670) auteur du traité de *Récréations mathématiques*.

(2) Le danois Longomontanus vivait de 1562 à 1647. Son ouvrage, paru à Amsterdam en 1644 est intitulé : « Christiani Severini Longomontani, Cimbri, Rotundi in plano, seu circuli absoluta mensura ».

(3) MAUPIN. — *Opinions et curiosités touchant la mathématique*, p. 24.

BCG qui coupe le cercle et la tangente, en sorte que la partie DG coupée de la tangente soit égale à BC, cette partie inscrite BC sera égale à la quatrième partie de la circonférence du cercle.

Le Teuner montra la fausseté de cette quadrature dans son « *Traité des quantitez incomensurables* ».

Mais en Hollande même cet ouvrage avait provoqué une première réfutation de Ludolph Van Ceulen (*Claer Bewiys*), laquelle, après une réponse de Vander Eycke (*Claerder Bewiys*), fut suivie d'une seconde réfutation (*Præfsteen* et *Claerder Widerleggingh*). Dans le « Claerder Bewiys » l'auteur abandonne sa première valeur de π pour y substituer l'expression

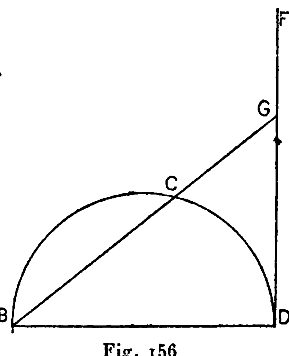


Fig. 156

$$\sqrt{\sqrt{5120} - 32} = 4\sqrt{2\left(\sqrt{5} - 1\right)} = 3{,}144605.....$$

surtout connue par la mention qu'en fait Nicolas Dithmarsus dans son *Fundamentum astronomicum*.

De Beaulieu, ingénieur géographe du Roy reproduisit, en 1676 dans « *La Géométrie française, ou la pratique aisée* » la quadrature déjà donnée par Charles de Bovelles.

Rémy Baudemont fit paraître en 1712 un petit traité in-8° intitulé « *La Grande et fameuse découverte de la quadrature du cercle* [1] dans lequel on trouve ce passage :

[1] Remy Baudemont présente ainsi sa découverte :

Au lecteur

Dois-je avant de résoudre un si fameux Problème,
Me fraïant un chemin à la gloire suprême,
Marquer ici les noms de mes vaïns concurrents ?
Non sans doute, et je hais cet indigne artifice.
J'attends de toy, Lecteur, une entière justice,
Sans briguer ton estime aux dépens des Sçavans.

« Dinostrate... partagea la circonférence d'un quart de cercle en autant de parties égales que le rayon, et il mena des rayons par tous les points de division de cette circonférence et des parallèles à l'autre rayon par tous les points de division du premier, de l'extrémité duquel il commença une ligne courbe, la continuant par l'intersection de la première parallèle et du second rayon, de la seconde parallèle et du troisième rayon, et ainsi de suite. Puis il démontra que la base de cette courbe est au rayon, comme le rayon est au quart de la circonférence. »

Ce théorème est exact, comme l'on sait, et si on prend un quart de cercle DAB, que DE soit l'arc de quadratrice dont il est parlé ; si on suppose AB $= 1$, on a :

$$AE = \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, comme le remarque Baudemont, la quadrature du cercle revient à déterminer géométriquement le point E. Mais de fausses apparences lui font démontrer que la surface du cercle tangent au premier en D et passant en E est à celle du premier comme 1 est à 2. Cela est inexact, le rayon du nouveau cercle est $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}$ et le rapport, présumé égal à $\frac{1}{2}$, est en réalité égal à

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\right)^2.$$

Si toutefois on supposait ces deux rapports égaux, on en tirerait pour π la valeur peu approchée

$$\pi = 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Une quadrature qui, de son temps, a fait beaucoup de bruit, à cause de la grande réputation de son auteur, est celle de Joseph

Scaliger. En 1594, ce savant publia un ouvrage [1] sur la question dans lequel il admet que les résultats donnés par le calcul peuvent ne pas être d'accord avec ceux que l'on obtient par une construction.

Voici quelques unes des propositions de Scaliger.

Le périmètre du dodécagone régulier est plus grand que la circonférence circonscrite.

L'aire du cercle vaut 36 fois le segment sous-tendu par le côté de l'hexagone régulier inscrit.

L'aire du cercle est équivalente à celle du rectangle dont les dimensions sont les côtés du triangle équilatéral inscrit, et les neuf-dixièmes du diamètre.

L'aire du cercle est plus petite que celle du tri-rectangle dont les côtés de l'angle droit sont le rayon et la circonférence.

C'est à la suite de telles propositions qu'il trouve

$$\pi = \sqrt{10} = 3,16227..,$$

Ludolph Van Ceulen, J. Errard, Adrien Romain (dans l'ouvrage *Apologia pro Archimède*), Ch. Clavius, Cataldi et Fr. Viète ayant osé réfuter sa logique mathématique, il se courrouça, les accabla d'injures, et se persuada de plus en plus que les géomètres n'avaient point le sens commun.

Dans un manuscrit de seize pages, paraissant remonter à Louis XV d'après l'écriture et l'orthographe et dont l'auteur était Nicolas Wursten, officier suisse réformé [2], on trouve une quadrature pouvant se résumer ainsi :

Ayant divisé le quadrant AB en cinq parties égales, aux points C, D, E, F, on trace la corde CF, on prolonge cette corde jusqu'à

[1] Les *Cyclometrica Elementa, libro duo,* qui ont été imprimés avec grand luxe, par Raphalingius, gendre de Ch. Plantin (les figures et leurs lettres sont en encre rouge au milieu du texte).

[2] Ce manuscrit, non daté, commence par une dédicace *à Sa Majesté très-chrétienne roi de France et de Navare* (sic).

ce qu'elle rencontre en M et N, les rayons OA, OB : la droite MN est le côté du carré équivalent au cercle [1].

.Citons encore l'Essai physico-géométrique de M. Le Rohberg-Herr de Vausenville [2] dans lequel se lit la proposition suivante :

Si de l'une des extrémités de l'arc d'un secteur de cercle, on tire une ligne qui divise ce secteur en deux parties équivalentes, cette ligne passe par le centre de gravité du secteur.

L'auteur déduit de cette proposition, qui est manifestement fausse, la distance du centre de gravité du secteur au centre du cercle, et, en appliquant le théorème de Guldin, le volume de la portion de sphère engendrée par la révolution du secteur ; en égalant ce volume à son expression vraie il obtient une équation entre le rayon du cercle et sa circonférence.

Il aurait trouvé la même équation sans tous ces détours, en égalant ce qu'il donnait pour être la distance du centre de gravité du secteur au centre du cercle, à l'expression vraie de cette distance.

De Vausenville avait donné une très grande publicité à son œuvre et l'avait envoyée, en France, aux Universités, Collèges et Académies.

Malgré ces soins, l'Académie des Sciences écarta dédaigneusement

[1] Le rayon étant pris pour unité

$$MN = 2 \cos 27^\circ, \quad \overline{MN}^2 = 2(1 + \cos 54^\circ)$$

opérant par logarithmes, on trouve

$$\cos 54^\circ = 0{,}587785, \quad \overline{MN}^2 = 3{,}17557 \text{ au lieu de } 3{,}1416.$$

[2] *Essai physico-géométrique.* — Exposé à la Censure du Public et nominativement à celle des Physiciens géomètres, Professants dans les Universités, Collèges et Académies, lesquels sont priés et invités de le réfuter, et d'en rendre la réponse par les Journaux Littéraires. — Avec une lettre d'invitation particulière à M. D'Alembert, pour le réfuter aussi, s'il y a lieu. — Dédié à Sa Sainteté et aux Monarques. — Par M. Le Rohberg-Herr de Vauseuville, Astronome, Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Historiographe de la ville Vire, etc. — « Virtus omni obice major ».

Paris, 1778, in-8°.

l'ouvrage de De Vausenville, en se bornant à affirmer la fausseté des propositions de l'auteur. Celui-ci en fut outré, d'autant plus que son Mémoire avait été envoyé à un Commissaire spécial de l'Académie, chargé d'examiner les inepties, et nommé paraît il, « Le Commissaire des Enfants perdus ». Il s'en plaignit vivement dans une longue lettre à d'Alembert, où nous relevons les détails suivants.

Un sieur *Coué*, inventeur d'un cuir à rasoir, fit approuver son invention par deux commissaires, alors que lui, de Vausenville, n'en a qu'un.

Charles V fit élever une statue à *Guillaume Bukel*, qui inventa l'art de saler et d'encaquer les harengs : que ne ferait-on pas pour le quadrateur du cercle ?

Les quadrateurs du cercle ont tous eu la manie d'exalter les avantages que tirerait le commerce de leur découverte.

Voici ce que l'on trouve dans l'ouvrage susdit :

« Note du Censeur. — La quadrature du cercle n'a aucun rapport direct, ni indirect, avec les avantages du commerce : c'est la manie de tous les quadrateurs de vouloir le faire croire ».

« Réponse. — C'est la manie des anti-quadrateurs de vouloir faire croire le contraire, et d'assujettir les idées d'autrui à leur façon de dire. Mon censeur eût parlé plus juste, s'il m'eût réduit à la nécessité de le prouver » (1).

On peut se demander aussi quels avantages pouvaient pousser tant de gens à rechercher la quadrature du cercle. *La Gazette de France* nous l'apprend : vers cette époque, un M. de Mély avait légué 50 000 écus pour sa découverte. De plus, le Trésorier de la Marine devait payer : 5 000 livres sterling à quiconque trouverait la manière de déterminer la longitude en mer, à un degré près ; 7 500

(1) Nous avons emprunté tous ces détails à l'intéressant ouvrage déjà cité de M. Maupin et dont nous conseillons fortement la lecture.

Opinions et curiosités touchant la mathématique d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles. Paris, 1898.

livres à deux tiers de degré près et 10000 livres à un demi-degré près. Chacun s'efforçait donc de cumuler les deux avantages et de Vausenville ne s'en cache pas.

Il s'était établi aussi sur ce problème des espèces de paris et de défis.

Entre autres exemples, on raconte qu'un fabricant de Lyon, nommé Mathulon, après avoir annoncé aux Géomètres et aux mécaniciens la découverte de la *quadrature* et du *mouvement perpétuel*, les défia de prouver qu'il s'était trompé, et déposa à Lyon une somme de 3000 francs qui devait être remise à son réfutateur. Nicole, de l'Académie des Sciences, lui démontra, sans réplique possible, qu'il déraisonnait, et demanda que les 3000 francs lui fussent adjugés. Le fier fabricant incidenta et prétendit qu'il fallait aussi prouver la fausseté de son mouvement perpétuel ; mais la sénéchaussée de Lyon ne vit pas en quoi une vérité prouvée dépendait d'une erreur à démontrer. Il perdit son procès devant elle, et Nicole céda les 3000 francs à l'hôpital de cette ville.

Le Châtelet de Paris eut également à se prononcer dans une affaire du même genre. Un *homme de condition*, après avoir provoqué triomphalement tout l'univers à déposer les plus fortes sommes contre la vérité de sa quadrature, consigna, par forme de défi, 10000 francs. Il déduisait de sa solution, l'explication palpable de la *Trinité*, et il donnait, comme évident, que le carré était le *Père*, le cercle, le *Fils*, et une troisième figure le *Saint-Esprit*. De là aussi, avec une rigueur invincible, l'explication du *péché originel*, de la *figure de la terre*, de la *déclinaison de l'aiguille aimantée*, des *longitudes*, etc.

Comme on le pense bien, il y eut concurrence pour les 10000 francs consignés ; une femme se mit sur les rangs ; elle crut qu'il ne fallait que le sens commun pour le réfuter. L'affaire fut plaidée au Châtelet, qui cette fois, jugea que la fortune d'un homme ne devait pas souffrir des erreurs de son esprit, lorsqu'elles ne sont pas nuisibles à la société. Et le roi ordonna que les paris fussent considérés comme non avenus. Mais le tenace inventeur n'en resta pas

moins persuadé que dans les siècles à venir on rougirait de l'injustice qui lui avait été faite.

Un nommé Liger crut avoir trouvé la fameuse solution du problème de la quadrature, en démontrant que la racine carrée de 24 égale celle de 25, et que celle de 50 égale celle de 49. Sa démonstration ne reposait pas, disait-il, sur des raisonnements géométriques qu'il abhorrait, mais sur le *mécanisme en plein des figures.*

Un autre quadrateur avec un « *plan quadrillé, moyen bien simple, comme tout ce qui est vrai* » mettait la quadrature « *à la portée de tout le monde* ». Il trouvait

$$\pi = \frac{3}{4} \cdot \frac{21}{5} = 3,15.$$

Son opuscule est arrivé à la 2me édition ([1]).

Mais voici mieux : deux quadrateurs s'associent non seulement pour faire leur découverte, mais encore pour l'exploiter, car ils prennent un brevet ! Leur petit prospectus contient ces deux propositions :

1° *Il existe de toute éternité, un rapport commensurable et constant du cercle à un polygone rectiligne bien connu ;* »

2° *Ce rapport est exactement égal à* $9\,\frac{179}{200}$ ».

Il se termine ainsi : « *Adresser les commandes au Bureau de la quadrature du cercle...* »

En 1877, l'Indépendance Belge publiait un « *Défi aux géomètres de l'Europe et de l'Amérique* ».

Le quadrateur, après avoir annoncé que « *la vraie proportion du cercle au carré inscrit est celle de 10 à 9* » poursuit ainsi : « *dans le* « *cas où aucun mathématicien ne pourra réfuter mes démonstrations.....* « *j'insisterai sur mon droit... de demander que la proportion prouvée*

([1]) Ce renseignement et les suivants sont empruntés à un article de Catalan paru dans la *Nouvelle Correspondance mathématique.*

« *par mes démonstrations soit reconnue publiquement comme la* « *vraie...* » [1]

Mais J. N. Sarrazin mérite une mention particulière.

Son *opuscule sur les matières les plus importantes en mathématiques* [2], est une collection d'extravagances sérieusement énoncées.

Exemples : « *J'ai vu qu'il n'y avait d'incommensurabilité entre la diagonale et le côté du carré, que par le faux corollaire tiré de l'exacte proposition de Pythagore, lequel fait le contenu égal au contenant* » [3].

« Jusqu'alors les géomètres se sont bornés à considérer le cercle comme purement égal à un triangle dont la hauteur serait le rayon, et la base sa circonférence, sans s'inquiéter du reste, s'il était ou non égal, en outre, à un vrai et parfait carré ».

« Il me semble que nos quadrateurs et même nos montuclistes (sic), ces fléaux des quadrateurs, et qui les ont traités avec tant de mépris, auraient dû nous dire, avant tout, s'il était possible qu'un carré parfait puisse prendre la forme circulaire... »

« Si vous avez un exact rapport du diamètre à la circonférence, quand on vous présente à réduire une superficie carrée en cercles... ; alors vous pourrez obtenir un diamètre exact, sans bavures d'irrationnalités » — « En vain, comme un second Prométhée, Pythagore a-t-il cru dérober un rayon du feu sacré, il n'a obtenu qu'un régulateur vicieux, un genre d'approximation au-dessus de la me-

(1) C'est vouloir faire de la Géométrie par autorité de justice, mais il faut s'attendre à tout de la part d'un quadrateur.

D'ailleurs, en 1848, à Paris, Duhamel et Poinsot n'avaient-ils pas été *dénoncés* au Procureur de la République, *pour avoir*, dans les problèmes de mécanique, *pris le temps comme variable indépendante !*

Les affiches signées *Passot* offraient un singulier mélange d'expressions judiciaires et de signes d'intégration.

(2) Pont-à-Mousson (1816) in-8° de 304 pages. Pour Sarrazin $\pi = \frac{256}{81} = 3,16$.

(3) *Avant-propos*, p. XI. — Catalan à qui nous empruntons tous ces détails, raconte avoir reçu à Paris la visite de l'*inventeur* d'un curieux théorème : *Dans tout triangle équilatéral la base est à la hauteur comme 12 est à 5*. Le pauvre homme avait consacré 10 années à la recherche de ce résultat.

sure directe ». — «... la superficie de la sphère est cinq fois celle d'un de ses grands cercles, ou bien de quatre seulement ; de sorte que les expériences, même les plus mal faites, ne peuvent donner des résultats si exacts d'un côté et si défectueux de l'autre, qu'en conséquence des faux raisonnements sur lesquels sont fondées les prétendues démonstrations qu'on donne de la superficie de la sphère etc., etc. »

Disons encore deux mots d'une note examinée par Haton de la Goupillière dans la Revue des travaux scientifiques pour l'année 1884 (p. p. 221-224). L'auteur de la note présente la quadrature du cercle sous la forme de l'énoncé suivant qu'il intitule *Théorème national : Pour obtenir le quart rectifié de la circonférence, il faut en partager le rayon en moyenne et extrême raison, puis mener une corde perpendiculairement par le point de séparation des deux segments.*

La valeur de la corde fournie par cette construction est 1,5722. Pour ne pas abuser de la patience du lecteur, terminons par ces quelques réflexions de Catalan malheureusement trop justes.

« Il y a quelque chose de plus triste que les divagations des quadrateurs : ce sont les encouragements qu'elles reçoivent parfois de certaines *sociétés* soi-disant *savantes*. On a vu une quadrature du cercle parvenue à la *cinquième édition* [1] et couronnée par l'*Académie nationale des Arts, des Sciences et de l'Industrie*. Il y a mieux, une autre société, tout aussi savante que la première, a décerné une médaille d'or à l'auteur d'un livre, dans lequel on lit : « les nombres qui sont des carrés parfaits sont appelés *nombres commensurables*, tels sont 16 et 81. On appelle *nombres incommensurables* ceux qui, comme 18 et 87 ne sont pas des carrés parfaits » !

[1] Vers 1864. L'auteur, un vieux berger des Pyrénées, s'appelait, croyons-nous Lacomme.

Dans la préface de son œuvre, il se glorifie modestement d' « avoir résolu un problème devant lequel ont échoué Newton et Laplace ».

NOTICE HISTORIQUE (A)

SUR LA

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

D'après COSSALI, t. II, p. 96-184 (1)

(Extrait du Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Géographie de Mathématiques de Terquem, t II, 1856)

Les Indiens, les Grecs et les Arabes savaient résoudre les équations binômes du troisième degré. Cette résolution se ramène immédiatement à une simple division ou à une extraction de racine carrée ou cubique. On doit la résolution d'une équation trinôme du troisième degré (2) aux Italiens du XVIe siècle. L'histoire de cette découverte jette un grand jour sur les mœurs et l'état des mathématiciens du temps. Les combats singuliers apportés en Occident par

(A) Aux trois problèmes de géométrie célèbres traités par Rouse-Ball, nous croyons devoir ajouter l'histoire d'un quatrième problème, point de départ de la rénovation des sciences mathématiques en Italie.

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica di nuova disquisitione analitiche e metafisiche arrichita di* D. Pietro Cossali, C. R. Deux volumes in-4. Ier volume 1797, 396 pages. IIe volume 1709, 492 pages. Dalla reale tipografiia Parmense.

Le P. Cossali, de l'ordre des Théatins, né en 1748, est mort à Vérone en 1815.

(2) M. Libri cite une solution de l'équation du troisième degré contenue dans un manuscrit du XIVe siècle : solution fausse donnée par analogie avec la solution des équations du second degré. *Exemple :*

$$px^3 = ax + b,$$

on donne

$$x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + b}.$$

les Barbares du Nord, qui se livrent malheureusement encore aujourd'hui dans les champs de l'honneur, existaient aussi alors dans les champs de la science. On se portait des défis publics, non seulement pour acquérir de la gloire, mais aussi dans l'intérêt de l'existence. Le vaincu, perdu de réputation, ne trouvait plus de disciples : tandis que le vainqueur était appelé par diverses cités à venir professer et à expliquer les auteurs classiques. Dès lors les inventeurs se gardaient bien de divulguer leurs découvertes ; car, munis de ces armes secrètes, il trouvaient plus avantageux de proposer des questions dont la solution reposait sur l'objet de ces découvertes. Pourtant ce secret intéressé porta malheur, comme nous l'allons voir, au célèbre Tartaglia, véritable auteur des formules qu'on s'obstine à nommer *formules de Cardan.*

Paccioli, dans son ouvrage (1) qui a paru en 1494, au VIII[e] chapitre du VI[e] traité de la VIII[e] distinction, énumérant les équations biquadratiques, dit : *Ma de capitoli de numero cosa et cubo composte over de numero censo e cubo over de numero cubo e censo de censo non se possut finora troppo bene formare regole generali per la disproporzionalita fra loro, perche fra loro non sono intervalli equali.* Cela signifie en écriture moderne que les trois équations

$$\begin{aligned} n &= ax + bx^3, \\ n &= ax^2 + bx^3, \\ n &= ax^3 + bx^4 \end{aligned}$$

(1) *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita.* In-folio, écriture gothique. A la fin, on lit :

Con spesa e diligentia e opificio del prudente huomo Paganino de Paganini da Brescia : nella excelsa cita de Venezia, con gratia del suo excelso dominio che per anni x *proximi nell altro in quello la possi restampare ne altrove stampata in quello portarla sotto pena in ditta gratia contenuta negli anno de nostra salute* MCCCCXCIII *a li* 10 *de novembre, Augustino Barbadico, serenessimo principe di quello. — Frater Lucas de Burgo, sancti Sepulcri ordinis Minorum et sacre theologie humilis professor, suo parvo ingenio ignaris compatiens hanc Summam Arithmetice et Geometrie proportionumque et proportionalitatum edidit ac impressoribus assistens die noctuque pro posse manu propria castigavit. Laus Deo* (voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 39).

ne peuvent encore *jusqu'aujourd'hui* être généralement résolues. Il donne une singulière raison de cette impossibilité : c'est qu'entre x et x^3 il y a un milieu, c'est x^2 (*media el censo*), tandis qu'entre le nombre et la chose x il n'y a pas de milieu.

Néanmoins, il ne croit pas à une impossibilité absolue. Aussi un nommé Scipion Ferro ou dal Ferro, né à Bologne où, au dire d'Alidosi et de Cardan, il enseignait les mathématiques, de 1496 à 1526, réussit à résoudre l'équation de la forme

$$x^3 + px = q,$$

et il en communiqua la pratique à son élève Antonio Maria Fiore ou del Fiore.

C'est tout ce qu'on sait de cette découverte, dont on ignore complètement la méthode, Il n'en est pas ainsi de la découverte de Tartaglia, sur laquelle on a beaucoup de renseignements donnés par lui-même dans son ouvrage : *Quesiti et inventioni diverse.*

Ce sont des questions adressées à Tartaglia par diverses personnes, avec les réponses, le tout sous forme de dialogues. Les huit premiers livres roulent sur la balistique, la fortification, l'art militaire, la mécanique, etc. (1).

Le IXe et dernier livre porte pour titre : *Sopra la scientia arithmetica, geometrica et in la pratica speculativa de algebra et almucabala, volgarmente detta Regola de la cosa, over Arte maggiore et massime della inventione de Capitoli de cosa e cubo equal a numero, et altri suoi ederenti et dependenti, et simelmente de censi et cubi equal a numero et suoi dependenti, qualli dalli sapienti sono stati giudicati impossibili* (2).

Cardan se sert aussi du mot *capitulum* pour désigner une équa-

(1) La partie balistique a été traduite par M. Rieffel, professeur à l'Ecole d'artillerie de Vincennes.

(2) La première édition est de 1546, in-4. On lit à la fin :
Stampata in Venetia per Venturino Buffinelli ad instantia et requisitione et a proprie spese de Nicolo Tartalea Brisciano autore, nel mese de Luio, l'anno de nostre salute MDXLVI.

tion. On voit qu'il s'agit de la résolution des équations cubiques de ces deux formes

$$x^3 + px = q$$

et

$$x^3 + px^2 = q$$

On arrangeait les équations de manière à ne renfermer que des termes positifs dans chaque membre, et une équation ainsi arrangée était considérée comme l'en-tête du problème, *Capitulum*.

Ce livre renferme quarante-deux questions ; la quatorzième a été proposée en 1530 par Zuane de Torrini da Coi [1], qui tenait école d'arithmétique à Brescia. Il demande : 1° de trouver un nombre qui multiplié par sa racine augmentée de 3 fasse 5, et semblablement de trouver trois nombres tels, que le deuxième surpasse le premier de 2, que le troisième surpasse le deuxième de 2, et que le produit des trois nombres soit égal à 1 000. Selon l'écriture actuelle, on parvient aux équations

$$x^3 + 3x^2 = 5,$$
$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1\,000.$$

Tartaglia répond qu'il possède une règle *générale* pour résoudre la question du cube et des *censi* égaux à un nombre ; mais, pour plusieurs raisons, il veut, pour le présent, se taire (*per àl presente voglio tacere per piu respetti*) ; quant à la seconde question, il avoue ne pas en connaître la solution, mais qu'il est bien loin de la croire impossible, et commence par dire vertement à Zuano : « Je sais que les professeurs de Brescia vous craignent et vous fuient, parce que, pour vous faire passer pour un grand mathématicien, vous leur faites des questions que vous-même ne savez pas résoudre, et je parie dix ducats contre cinq qu'il en est ainsi de vos deux questions. C'est un procédé dont vous devriez rougir. » (*Et circa cio ve dovi resti alquanto a rossire.*)

[1] Cardan le nomme da Dolle et da Colla ; Zuane pour Giovanne ; les Vénitiens changent souvent le *g en z ; mazore* pour *maggiore*.

Cette question XXV fut portée à Venise, où Tartaglia était professeur, par un nommé Antonio de Cellatica, et, dans sa question XXV, 10 décembre 1536 Tartaglia, annonce qu'il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + n = mx^2$$

le lendemain du jour où il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + mx^2 = n.$$

Nous ferons observer une fois pour toujours que Tartaglia ne fait usage ni de nos signes ni de nos exposants. Comme les Arabes, il parle des *capitoli* et ne les écrit pas ; dans son langage, la *cosa* c'est l'inconnue, le *censo* c'est le carré, et le *cubo* c'est le cube ([1]) ; ainsi, pour exprimer la dernière équation, il emploie cette locution : *cubo e censi egual a numero*, et ainsi des autres.

Cependant Antonio Maria del Fiore, ce disciple de Scipion Ferro dont nous avons parlé ci-dessus, se vantait de venir humilier Tartaglia pour sa prétendue habileté dans la solution des problèmes. Tartaglia, sachant que del Fiore n'était qu'un arithméticien sans aucune connaissance théorique, ne tint aucun compte de ces vanteries ; mais ayant appris que del Fiore était en possession de la règle générale de résoudre le *chapitre* (*capitole*) du *cube* et de la *chose* égale au nombre, qu'un grand maître lui avait enseigné, il y a une trentaine d'années, il commença à avoir des craintes, s'appliqua à ce *chapitre*, et parvint à en trouver la solution le 14 février 1535, et le lendemain il trouva la solution des équations

$$x^3 = px + q,$$
$$x^3 + mx^2 = n,$$
$$x^3 + n = mx^2.$$

Bien lui en prit. Car, huit jours après cette découverte, le 22 février

([1]) Cardan nomme aussi l'inconnue *res* et aussi *positio*, du verbe *ponere* ; on ne posait que des quantités positives.

1535, del Fiore vint à Venise où Tartaglia professait alors, et lui porta un défi public qui fut accepté. Del Fiore déposa chez le notaire Jacomo Zambelli trente questions et une certaine somme d'argent ; Tartaglia en fit autant. Celui des deux qui, au bout de trente à quarante jours, aurait résolu le plus de questions serait déclaré vainqueur et gagnerait la somme déposée. Voici les trente questions de del Fiore, telles qu'elles sont énoncées dans la question XXXI des *Quesiti*.

1. Trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique fasse 6.

2. Trouver deux nombres en proportion double (x, $2x$) tels, que si l'on multiplie le carré du grand nombre par le plus petit nombre et qu'au produit on ajoute les deux nombres, on obtienne 40.

3. Trouver un nombre qui ajouté à son cube fasse 5.

4. Trouver trois nombres en proportion triple (x, $3x$, $9x$) tels, que le carré du plus petit multiplié par le plus grand et ajoutant au produit le nombre moyen, la somme soit égale à 7.

5. Deux hommes mettent en société un capital de 900 ducats ; le premier met la racine cubique du second. Quelle est la part de chacun ?

6. Deux hommes gagnent ensemble 100 ducats ; le gain du premier est la racine cubique de la part du second.

7. Trouver un nombre qui ajouté à deux fois sa racine cubique fasse 13.

8. Trouver un nombre qui ajouté à trois fois sa racine cubique fasse 15.

9. Trouver un nombre qui ajouté à quatre fois sa racine cubique fasse 17.

10. Partager 14 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

11. Partager 20 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

12. Un joaillier vend un diamant et un rubis pour 2,000 ducats ; le prix du rubis est la racine cubique du prix du diamant.

13. Un juif prête un capital à cette condition qu'à la fin de l'année on lui payera pour intérêts la racine cubique du capital. A la fin de l'année, le juif a reçu 800 ducats, capital et intérêt. Quel est ce capital ?

14. Partager 13 en deux parties telles, que le produit de ces deux parties soit égal au carré de la plus petite partie multipliée par elle-même.

15. Quelqu'un vend un saphir pour 500 ducats et y gagne la racine cubique de son capital.

Les quinze autres questions reviennent à partager les nombres 7, 12, 9, 25, 26, 28, 27, 29, 34, 12, 100, 140, 300, 810, 700 chacun en deux parts dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

On voit que toutes ces questions amènent à l'équation

$$x^3 + px = q.$$

Aussi Tartaglia les résolut toutes en moins de deux heures, et Fiore ne résolut aucune des trente questions posées par Tartaglia ; du moins il ne voulut pas communiquer ses solutions et ne s'en rapporter qu'au jugement de ses amis. C'était s'avouer vaincu. Tartaglia se contenta de la gloire et renonça au prix.

On ne connaît que les quatre premières des trente questions posées par Tartaglia. On les trouvera plus loin.

Tel est le récit que fait Tartaglia à Zuane di Coi (*quesito* XXV), mentionné ci-dessus, qui s'était rendu à Venise, le 10 décembre 1536, pour prier instamment Tartaglia de lui donner communication des trente questions qu'il avait proposées. Tartaglia dit qu'il n'en avait pas gardé de copie, mais qu'en allant chez le notaire et lui offrant une légère rétribution (*donate gli una gentilezza)*, il en aurait une copie ; mais, en tout cas, il refuserait de donner les solutions, de crainte que ces solutions ne fassent trouver la règle. Toutefois, il lui donna les quatre premières questions.

1° Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par sa racine carrée augmentée de 40, le produit soit égal à un nombre rationnel donné,

2° Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par 30 moins la racine carrée de cette quantité, on obtienne un nombre rationnel donné.

3° Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en y ajoutant quatre fois la racine cubique, on obtienne 13.

4° Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en en soustrayant trois fois sa racine cubique, il reste 10.

Les autres questions sont restées inconnues, mais elles roulaient sur la géométrie, l'algèbre.

Zuane vit tout de suite, ce qui annonce même une certaine perspicacité, que la première question mène à l'équation

$$x^3 + mx^2 = n,$$

la deuxième à

$$m^2 x^2 = x^3 + n,$$

la troisième à

$$x^3 + mx = n,$$

la quatrième à

$$x^3 = mx + n.$$

Comme il était tard, Tartaglia l'engagea à rester avec lui à souper. Zuane lui dit qu'il était invité chez un sien cousin. Piqué de ce refus, Tartaglia lui dit : Attendez que le désir me vienne encore que vous restiez (*Aspetti quanto voglia, che voglio, che restati*).

Zuane se mit en vain l'esprit à la torture pour trouver les solutions, et il retourna le 16 décembre vers Tartaglia et renouvela ses supplications. Tartaglia lui dit que ses découvertes lui avaient coûté beaucoup de peines et qu'il ne se croyait pas tenu de les publier sans en tirer aucun honneur, aucun profit ; qu'il savait d'ailleurs qu'il n'était pas licite de vouloir ensevelir totalement de telles inventions ; que son intention était que, lorsqu'il aurait fini d'autres travaux (1), de tout publier. Pour montrer qu'il n'attachait pas une importance exagérée à ses découvertes, il fit cette offre à Zuane :

(1) Il était occupé à traduire Euclide.

« Pour chaque problème que vous me donnerez et avec la solution, si je n'ai pu la trouver, je vous donnerai en échange une de mes formules générales. » Zuane accepta et proposa tout de suite ces deux questions : 1° dans tout triangle rectangle la somme des deux côtés de l'angle droit est égale à l'hypothénuse plus le diamètre du cercle inscrit ; 2° dans un triangle ABC on a AB = 13, BC = 14, CA = 15 ; sur la hauteur AD, on prend dans l'intérieur DF = 3 ; on mène la droite BF et on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en E. Trouver les segments AE et CE (¹). Tartaglia lui répond : « Tout cela est si facile, que si vous me donnez une heure de temps, je vous en donnerai la solution. A cette occasion je vous rappellerai que l'année dernière me furent apportées de votre part trois questions, dont l'une était ainsi conçue : Trois hommes ont acheté chacun une certaine quantité de livres de viande dont la somme est 20 livres : la quantité moyenne est égale au produit des extrêmes, et le produit des deux moindres quantités est 8 ; et, selon votre habitude, vous ne pouvez en savoir la solution puisqu'elle est impossible (²)». Enfin vaincu par les prières et les serments, Tartaglia lui donna la solution de sa première question pour le cas particulier où le nombre rationnel est 2 888, et il lui dit qu'alors la quantité irrationnelle x^2 est $78 - \sqrt{308}$; en effet, on parvient à l'équation

$$x^3 + 40x^2 = 2\,888$$

et

$$x = -1 + \sqrt{77}.$$

De retour à Brescia, Zuane réfléchissant sur cette solution, en

(¹) Il suffit de prendre un triangle dont les trois côtés et l'aire soient rationnels ; alors les hauteurs et les segments formés par ces hauteurs sur les côtés sont rationnels. Posons

$$pq = PQ;$$

les trois côtés sont $p^2 - q^2 + P^2 - Q^2$, $p^2 + q^2$, $P^2 + Q^2$.

(²) Cette question exige la résolution d'une équation du quatrième degré.

trouva de semblables; ainsi il trouva pour l'équation $x^3 + 8x^2 = 72$,

$$x^2 = 14 - \sqrt{52}, \quad x = -1 + \sqrt{13},$$

et pour l'équation $x^3 + 72 = 8x^2$

$$x^2 = 14 + \sqrt{52}, \quad x = 1 + \sqrt{13}.$$

Sa solution de l'équation

$$x^2 + mx^2 = 4$$

revient à prendre

$$x^2 = 2m - 2 - \sqrt{4(2m - 2 - 1)};$$

c'est le cas particulier où l'on aurait dans l'équation $x^3 + n = mx^2$:

$$n = \pm 2m^2 \mp 8m \pm 8;$$

on part d'une forme de la racine pour trouver l'équation correspondante à cette racine ([1]). Enflé de cette prétendue découverte, Zuane écrit à Tartaglia, en date du 8 janvier 1537, une lettre d'une extrême insolence, déniant la primauté de ses découvertes, et dit qu'en donnant cinq sols pour chacune de ses trente réponses à del Fiore, elles auraient été très bien payées. Tartaglia dédaigna de répondre ; mais Zuane étant revenu à la charge le 17 février 1537, Tartaglia lui annonça qu'il eût à cesser toute correspondance, et que s'il veut obtenir des explications, il n'avait qu'à se rendre de sa personne à Venise.

Ici finit la première partie de la vie militante de Tartaglia. Dans la seconde partie, la plus célèbre, il eut à lutter contre un homme de science universelle, d'un génie souvent très pénétrant, d'une extravagance souvent gigantesque, muni de beaucoup de ruse, d'as-

([1]) Tartaglia ne fait pas cette observation, d'où Cossali est tenté de croire qu'à la fin de 1536 il ne possédait pas encore de règle générale. Mais sans la connaissance de cette règle générale, comment aurait-il pu, en moins de deux heures, résoudre les trente questions de del Fiore ?

tuce et de peu de conscience : tel était Cardan. Tandis que Tartaglia, enfoncé dans Euclide et Archimède, d'un caractère candide, croyant naïvement que dans les affaires du monde la ligne droite est la plus courte, devait succomber, et il a succombé.

Zuane venait de quitter Brescia pour se transporter à Milan, où il fut bien accueilli de Cardan qui lui céda même un de ses cours. Il l'entretint de Tartaglia et de son invention. Cardan, occupé de publier son *Ars magna*, et vivement excité pour le duel algébrique de Tartaglia et de del Fiore, voulait enrichir son ouvrage de la découverte de la nouvelle invention. Il chargea un libraire, Zuan Antonio de Bassano, de prier de sa part Tartaglia :

1° De lui envoyer la résolution de l'équation

$$x^3 + px = q\,;$$

2° De vouloir bien lui résoudre les sept questions suivantes :

1. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la première soit 2.

2. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la seconde soit 2.

3. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du second et du quatrième fasse 10.

4. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du troisième et du quatrième fasse 10.

5. Trouver six nombres en proportion continue dont le second soit 2 et dont la somme du premier et du quatrième fasse 10.

6. Partager 10 en trois nombres continuellement proportionnels et dont le produit du premier par le second fasse 16.

7. Trouver un nombre qui multiplié par sa racine carrée augmentée de 3 fasse 21.

Ces questions amènent respectivement aux équations :

1. $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10.$
2. $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10x.$
3. $2x^3 + 2x = 10.$
4. $2x^3 + 2x^2 = 10.$
5. $2x^3 + 2 = 10x.$
6. $x^4 + 8x^2 + 8^2 = 10x^3.$
7. $x^3 + 3x^2 = 21.$

Cardan promit d'insérer la solution du cube et de la chose égale au nombre dans son ouvrage sous le nom de Tartaglia, ou bien, si tel est son désir, de garder le secret.

C'est l'objet de la question (*quesito*) XXXI du 2 janvier 1539.

Le libraire, pour appuyer sa demande, fit ressortir la haute position médicale et géométrique de Cardan, qui faisait à Milan un cours public sur Euclide avec tant d'éclat, que le marquis del Vasto l'en avait récompensé et qu'il était maintenant sur le point de publier un bel ouvrage sur la pratique de l'arithmétique et de la géométrie. Tartaglia répond que lui-même projetait un ouvrage sur l'algèbre, et qu'il préférait publier ses découvertes dans son propre ouvrage que dans celui d'autrui ; qu'il ne donnerait pas ses trente solutions, parce qu'elles serviraient, à un savant homme comme Cardan, à trouver la règle ; quant aux sept questions, elles ont été évidemment dictées par da Coi, maintenant à Milan ; les deux dernières sont les mêmes que celles que da Coi lui a adressées il y a une année ; qu'il est impossible qu'on ait la solution à Milan, puisqu'on n'y sait pas même *le cube et la chose égale au nombre*, et les sept questions mènent à des équations (*capitoli*) beaucoup plus compliquées. Il donna au libraire copie des questions de del Fiore et renvoya pour les siennes chez le notaire.

Cardan, irrité de ce refus et de cette allégation, écrit, le 12 février 1539, une lettre dictée par le ressentiment et la colère. Il lui reproche d'être, non moins que Zuano, un présomptueux, d'avoir la folie de se croire quelque chose d'important, qu'il n'est pas au sommet de la montagne, qu'il n'est qu'au pied, dans la vallée, et

autres reproches semblables. Ensuite il se résumé en quatre points.

1° Il trouve singulier que Tartaglia attribue ses sept questions à dal Coi (il le nomme Zuane Colle) : comme s'il n'y avait personne à Milan sachant en faire de semblables ; lui, Cardan, le savait avant que del Colle sût compter jusqu'à 10, s'il est aussi jeune qu'il le dit.

2° Que Tartaglia croit parler à des écoliers lorsqu'il prétend qu'une seule des trente questions d'Antonio étant résolue, les sept questions le sont également ; que les trente questions se réduisent à la solution de $x^3 + x = n$ (1) et non pas à $x^3 + mx = n$; qu'en voulant paraître merveilleux dans notre art auprès du libraire, il s'est montré ignorant auprès des connaisseurs : toutefois Cardan veut bien ne pas le croire ignorant, mais seulement présomptueux.

3° Que Tartaglia avait dit au libraire qu'une des sept questions résolues, toutes le seraient : chose complètement fausse et injurieuse ; qu'il parie 100 écus que Tartaglia n'est pas capable de réduire ses questions ni à une seule, ni à deux, ni même à trois. — Au fait, Tartaglia n'a rien dit de semblable au libraire. C'est de l'invention de Cardan pour avoir un prétexte de récriminer, ou bien le libraire n'a pas compris ce que Tartaglia lui a dit.

4° C'est une question de balistique où Cardan et Tartaglia raisonnent d'après la physique du temps et se trompent l'un et l'autre.

Et il finit par lui adresser ces deux nouvelles questions :

1° Partager 10 en quatre parties formant une proportion continue, telles que leurs carrés fassent ensemble 60 ; donné mais non résolu par fra Lucca (Paccioli).

2° Deux hommes font société et chacun gagne le cube de la dixième partie de son capital.

Il déclare mettre les solutions sous cachet, et si Tartaglia ne sait pas les résoudre, on lui remettra les solutions à condition qu'il donnera une des solutions des sept questions.

(1) En style de Cardan : *La radice pronica media.*

Mais Tartaglia ne fut pas dupe cette fois-ci et lui dit nettement : Puisqu'il demande la solution de sa première question, c'est qu'il n'est capable d'en résoudre aucune. Il lui donne la solution de ses deux dernières questions ; mais, quant à la seconde, elle exige la solution de l'équation cubique et qu'il ne la donnera pas ; que Cardan veut l'attraper comme font les Bohémiens (*come costumano le cingheni*).

Cependant il se montre plus libéral qu'envers del Coi, et lui indique dix des trente questions : d'abord les quatre déjà mentionnées ci-dessus, puis les suivantes :

1° Couper une droite de longueur donnée en trois segments avec lesquels on puisse construire un triangle rectangle.

2° Couper une pyramide tronquée en trois parties égales.

3° Inscrire géométriquement un carré dans un triangle scalène.

4° Un tonneau est rempli de vin pur ; on en retire chaque jour deux seaux qu'on remplace par deux seaux d'eau ; au bout de six jours, il y a moitié vin et moiti eau. Quelle est la contenance du tonneau ?

Cardan voyant que ni les injures, ni les subterfuges ne pouvaient réussir, changea de plan, eut recours aux louanges et au mensonge. Dans une lettre du 19 mars 1539, qui commence par *Messer Nicolo mio carissimo*, il lui dit qu'il ne doit pas prendre en mauvaise part ses observations. Il rejette le tort sur dal Colle (c'est ainsi qu'il nomme ici dal Coi), qui, venu à Milan, lui a donné une idée défavorable du caractère de Tartaglia, et se plaint de l'ingratitude de ce dal Colle qui a quitté brusquement Milan, abandonnant soixante élèves qu'il lui avait procurés. Enfin il termine sa missive par inviter Tartaglia à venir à Milan le plus promptement possible. Le marquis del Vasto, Mécène très-libéral, auquel il avait remis de la part de Tartaglia deux instruments de son invention, désirait ardemment l'entretenir. — Il est probable que tout ceci n'était qu'un stratagème. Quoi qu'il en soit, après avoir hésité quelques instants, Tartaglia se rendit à Milan et accepta un logement dans la maison de Cardan. Leur entretien du 29 mars 1539 est l'objet du

quesito XXIX. Comme le dialogue est caractéristique, nous en donnons la traduction :

CARDAN. — Je suis bien aise que vous soyez venu au moment où le marquis est allé à Vigevano ; cela nous permettra de causer et de raisonner ensemble de nos affaires jusqu'à son retour. Certes, vous vous êtes montré de par trop peu complaisant de n'avoir pas voulu me donner la règle que vous avez trouvée sur l'équation (*il capitolo*) de la chose et du cube égal au nombre, lorsque je vous en ai si instamment prié.

NICOLO TARTAGLIA. — Je vous dirai que j'ai fait l'avare non pas tant pour cette simple équation et pour les choses qu'elle m'a fait trouver, mais pour celles que cette équation doit faire découvrir ; car c'est une clef qui ouvre la voie à l'investigation d'une infinité d'autres équations, et si je n'étais pas occupé aujourd'hui à traduire Euclide (je suis déjà arrivé au XIIIe livre), j'aurais déjà trouvé une règle générale pour beaucoup d'autres équations ; mais dès que j'aurai terminé mon travail sur Euclide, j'ai dessein de composer un ouvrage de pratique, avec une nouvelle algèbre, dans laquelle je publierai non-seulement mes inventions sur les nouvelles équations, mais beaucoup d'autres que j'espère découvrir, et je veux même encore montrer le moyen d'en découvrir beaucoup d'autres, ce qui, j'espère, sera une chose très-utile, très-belle. Et ce qui fait que je refuse de la communiquer à qui que ce soit, c'est qu'en ce ce moment je ne puis y donner aucun soin (comme je l'ai dit, étant occupé d'Euclide). Et si je l'enseignais à quelque esprit spéculatif (comme est Votre Excellence), il pourrait facilement découvrir d'autres équations et les publier comme de son invention, ce qui gâterait complètement mon affaire. C'est là la cause qui m'a forcé d'être si impoli envers Votre Excellence ; d'autant plus qu'elle est occupée à imprimer un ouvrage sur une semblable matière et qu'elle m'a écrit vouloir insérer mes inventions sous mon nom dans cet ouvrage.

CARDAN. — Mais je vous ai écrit aussi que si vous n'êtes pas content, je m'engage à tenir la chose secrète.

N. Tartaglia. — Quant à cela, il m'a été impossible de vous croire.

Cardan. — Je vous jure sur les saints Evangiles de Dieu et comme vrai homme d'honneur que si vous m'enseignez vos inventions, non seulement je ne les publierai jamais, mais encore je les noterai pour moi en chiffres, afin qu'après ma mort personne ne puisse les comprendre. Si vous voulez maintenant me croire, croyez-le ; sinon, laissons cela.

N. Tartaglia. — Si je n'ajoutais pas foi à un tel serment, je mériterais certainement d'être regardé comme un homme sans foi ; mais j'ai résolu d'aller à Vigevano pour trouver monsieur le marquis parce que voilà déjà trois jours que je suis ici et que je m'ennuie d'attendre ; à mon retour, je vous promets de vous découvrir tout.

Cardan. — Puisque vous allez voir monsieur le marquis, je veux vous donner une lettre (1) afin qu'il sache qui vous êtes ; mais avant de partir, je veux que vous me montriez la règle que vous m'avez promise.

N. Tartaglia. J'y consens. Mais sachez que pour pouvoir en toute occasion imprévue me rappeler mes opérations, je les ai mises en vers ; si je n'avais pas pris cette précaution, elles me seraient souvent sorties de la mémoire ; et quoique ces vers ne soient pas très bons, peu m'importe : il suffit qu'ils me servent à me rappeler la règle chaque fois que j'en ai besoin. Je veux vous en donner une copie par écrit, afin que vous soyez bien sûr que je vous ai bien donné mon invention telle qu'elle est.

1. *Quando che'l cubo con le cose appresso,*
Se aggaglia a qualche numero discreto,
Trovati dui altri differenti in esso.

2. *Dapoi terrai questo per consueto*
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto.

(1) Cela montre bien que le désir du marquis de voir Tartaglia est une pure invention de Cardan.

3. *El residuo poi suo generale*
Delli lor lati cubi ben sottrati
Vorra la tua cosa principali.

4. *In el secundo de cotesti atti,*
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest'altri contratti.

5. *Del numer farai due, tal part'a valo*
Che l'uno e l'altru si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stelo.

6. *Delle qual poi, per commun precetto,*
Torrai li lati cubi insieme gionti,
Et cotal somma sarà il tuo concetto.

7. *El terzo poi de questi nostri conti*
Se solve con secondo, se ben guardi
Che ser natura son quasi congionti.

8. *Questi trovai, et non con passi tardi*
Nel mille cinquencente quatro et trenta
Con fundamenti ben saldi e gagliardi,
Nel città dal mar intorno centa.

Nous allons essayer une traduction avec l'explication qui la rende intelligible.

1. *Quand le cube joint avec les choses,*
Egalent quelque nombre donné,
Trouve deux autres dont la différence tienne lieu du nombre.

Explication. — Soit

$$x^3 + px = q,$$

posons

$$t - u = q,$$

2. *Après tu feras, selon l'usage,*
Que leur produit soit toujours égal
Au cube du tiers des choses.

Explication. — Pose

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = \frac{1}{27}p^3.$$

3. *Ensuite le résidu général*
Des côtés de leurs cubes
Donnera ton inconnue principale.

Explication :

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u},$$

t et u sont inconnues auxiliaires, x est l'inconnue principale.

4. *Dans la seconde de ces opérations,*
Lorsque le cube reste seul,
Tu observeras ces autres préceptes.

Explication. — Lorsque $x^3 = px + q$.

5. *Du nombre, fais deux parts de manière*
Que l'un et l'autre produisent exactemen
Le cube du tiers de la chose.

Explication :

$$t + u = q, \quad tu = \left(\frac{1}{3}p\right)^2.$$

6. *Ensuite par un précepte connu*
Tu mettras ensemble les côtés des cubes
Et cette somme sera ce que tu cherches.

Explication :

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}.$$

7. *Puis la troisième de ces opérations*
Se résout par la seconde, si tu remarques bien
Qu'elles sont quasi conjointes par leur nature.

Explication :

$$x^3 + q = px\,;$$

elle se déduit de la seconde $x^3 = px + q$ en prenant q négativement.

8. *J'ai trouvé ces choses, non à pas tardif,*
En mil cinq cent trente-quatre,
Sur des fondements solides et vigoureux
Dans la cité entourée de la mer.

Cela est si clair, que, sans autre exemple, je crois que Votre Excellence comprendra le tout.

Cardan. — Je l'ai quasi compris jusqu'à présent ; partez, et lors de votre retour, je vous ferai voir si je l'ai compris.

N. Tartaglia. — Maintenant que Votre Excellence s'applique à ne pas manquer à la foi promise, car si, par malheur, Votre Excellence manquait de foi envers moi, soit en imprimant dans votre ouvrage, soit autrement, même en y mettant mon nom et me proclamant l'inventeur, je vous promets et vous jure que je ferai imprimer immédiatement après quelque chose qui ne vous sera pas très agréable.

Cardan. — Ne doutez pas que je ne tienne ce que je vous ai promis. Allez et soyez tranquille. Donnez cette lettre de ma part au marquis.

N. Tartaglia. — Je me recommande.

Cardan. — Bon voyage.

N. Tartaglia (*à part*). — Par ma foi ! je n'irai pas à Vigevano, mais je veux retourner tout de suite à Venise, advienne que pourra.

Ici se termine le *quesito* XXXIV.

9 avril. Dans le *quesito* suivant, Cardan lui témoigne sa surprise

de ce qu'il a subitement quitté Milan sans voir le marquis, seigneur si généreux et qui était revenu pour le Samedi Saint ; lui annonce que son ouvrage, presque terminé, paraîtra la semaine prochaine ; et il finit par cette prière : « J'ai trop présumé de mes forces : je ne comprends pas entièrement votre règle et vous prie de m'envoyer la solution de cette équation $x^3 + 3x = 10$. » A cela Tartaglia répond, le 23 avril, qu'il avait promis à ses amis d'être sans faute de retour à Venise pour le Samedi Saint, et que Cardan s'est trompé sur le sens du dernier vers du second tercet en posant

$$ut = \frac{1}{3}p^3,$$

tandis qu'il faut poser

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3,$$

alors

$$t = \sqrt{26} + 5 \quad \text{et} \quad u = \sqrt{26} - 5,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}}.$$

Il résout de même l'équation

$$x^3 + x = 11,$$

mais ne fait aucune mention de la multiplicité des racines.

12 mars. Cardan lui envoie son premier ouvrage d'algèbre avec prière de ne pas trop le répandre pour ne pas nuire au libraire, et renouvelle sa promesse de ne pas parler des découvertes de Tartaglia.

27 mars. — Réponse de Tartaglia qui s'excuse sur ses occupations et sur une indisposition de n'avoir pu que jeter les yeux sur l'ouvrage de Cardan et y signale pourtant une grosse erreur sur une règle pour extraire la racine cubique par approximation. Cardan pose

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2}.$$

10 juillet. — *Quesito* XXXVII. Maphio Paviciani, un disciple de Tartaglia, résidant à Bergame, lui écrit qu'un de ses amis de Milan annonce que le médecin Cardan avait publié un second ouvrage d'algèbre où il a parlé de nouvelles équations qui ne sont probablement pas autres que celles de Tartaglia.

19 juillet. — Tartaglia répond qu'en effet ces équations nouvelles ne peuvent être autres que les siennes ; qu'il en est extrêmement contrarié, et que le proverbe ne ment pas qui dit : *Quello che tu non voi che si sappia, nel dire ad alcuno.* (Ce que tu ne veux pas que l'on sache, ne le dis à personne).

4 août. — *Quesito* XXXVIII. Cardan se plaint de ce que Tartaglia a laissé sans réponse plusieurs de ses questions ; qu'il comprend bien la règle, mais qu'il ne sait plus s'en tirer lorsque le cube du tiers de la chose surpasse le carré de la moitié du nombre, et lui demande la résolution de l'équation

$$x^3 = 9x + 10.$$

C'est ce qui est devenu si célèbre sous le nom de *cas irréductible.* La racine — 2 se présente sous une apparence irrationnelle. Quant à l'extraction de la racine cubique par approximation (*voir* ci-dessus), il y a dans son ouvrage d'autres règles pour cela et qui sont très exactes.

7 août. — Tartaglia ne pouvant résoudre la difficulté et déjà irrité, fait une réponse assez impertinente ; veut faire accroire à Cardan qu'il applique mal la règle et lui dit que ses secondes règles d'approximation ne valent pas mieux que la première.

18 octobre. — Cardan écrit : Tartaglia a-t-il perdu l'esprit, peut-être à force d'étudier et de lire ? que lui est sûr de bien comprendre la règle ; il veut parier 100 écus contre 25 qu'il sait résoudre l'équation

$$x^3 = 12x + 20.$$

Tartaglia ne veut plus répondre.

5 janvier 1540. *Quesito* XL. Cardan avertit *fraternellement* (*quanto*

fratello) Tartaglia que ce diable de Zuane dal Colle (*quel diavolo de messer Zuane Colle*) vient encore d'arriver à Milan, ayant appris que je voulais lui céder un de mes cours, celui d'Arithmétique : se croyant un homme fort, je l'ai examiné et ne le trouve pas ce qu'il croit être ; je vous avertis qu'il possède votre équation de la chose et du cube égal au nombre et celle de la chose et du nombre égal au cube, et se vante que, lors de son séjour à Venise, il est entré en discussion avec del Fiore, et, par cette voie, il est parvenu à ce qu'il cherchait ; la discussion lui a fait connaître la nature de l'équation, et, après diverses conjectures, aidé d'un de ses compagnons, il a trouvé la solution. Sachez qu'il a encore trouvé la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$; elle est égale à $1 + \sqrt{3}$; et aussi

$$\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt{3} - 1,$$

et de là

$$\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} - \sqrt[2]{10 - \sqrt{108}} = 2.$$

Je vous engage à chercher la règle, je n'ai pas pu la trouver. Je vous avertis encore qu'il a la solution de la question que j'ai faite de partager 10 en trois nombres formant une proportion continue et tels, que le produit du premier par le second fasse 8, et qu'il m'enseignera sa solution si je lui cède mon cours. Ainsi veuillez la chercher ; j'avoue ne pouvoir la trouver, pas plus que la suivante que Zuane ne sait pas non plus : Trouver trois nombres en proportion continue tels, que la somme du premier et du troisième fasse 10 et que le produit du premier et du second fasse 7. Il dit avoir aussi la démonstration que le cercle contient une aire maxima entre toutes les figures de même contour ; que cette proposition, qui se trouve peut-être dans Proclus ou dans Théon, lui a été enseignée par messer Philène, de Bologne. Il propose encore ce problème : Soit donné le rectangle ABCG et soit encore donné le centre D du rectangle ; trouver sur le prolongement de AB un point F et sur le prolongement de AC un point E tels, que les trois

points E, F, G soient en ligne droite et que DE soit égal à DF. Si l'on prend

$$AB = 2, \quad BC = 3,$$

quelle est la valeur de DE?

Cette lettre est suivie des observations de Tartaglia. « Je trouve, dit-il, que Cardan a un esprit plus obtus que je ne croyais. Zuane n'est pas venu pour qu'il lui cède son cours, mais pour le lui enlever. Cardan en a peur. Aussi Zuane lui en donne à garder lorsqu'il dit posséder la solution des équations (*capitoli*). L'extraction de la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$ ne présente pas de difficulté : il suffit de décomposer 10 en deux nombres dont l'un soit un cube et l'autre divisible par 3, et on trouve de même le *résidu* (1) »

Il découvre encore d'autres traces de simplicité dans la conduite de Cardan, et ses observations se terminent ainsi :

Et per questo non li voglio dar altra riposta per che è non vi ho piu affectione à lui che à messer Zuane, e pero li voglio lassar far tra loro; ma me la vedo che lui e perso d'animo, non so mo comme l'andera.

« C'est pour cela que je ne veux plus lui faire d'autre réponse, parce que je n'ai pas plus d'affection pour lui que pour messer Zuane ; je veux les laisser faire entre eux, mais je vois qu'il a perdu l'esprit et ne sais maintenant comment cela ira.

Depuis, toute correspondance cesse avec Cardan. Le pauvre Tartaglia croit que Cardan est la dupe de Zuane, et il ne soupçonne pas d'être lui-même dupe de Cardan, qui fait intervenir ce Zuane pour se ménager un prétexte de dégager sa parole et d'être impunément parjure.

1541. — Le *quesito* XLII a encore rapport à l'équation cubique. C'est un dialogue entre Tartaglia et un gentilhomme anglais nommé Ricardo Ventuorthe, son disciple et son ami (*compare*).

(1) Euclide nomme *binôme* les expressions $a + \sqrt{b}$ et *apotome* (segment) les expressions $a - \sqrt{b}$; de là en latin *recisus* et en italien *reciso;* c'est le *résidu* de Tartaglia.

Tartaglia refuse de lui donner ses règles ; mais, après qu'il aura fini son travail sur Euclide et Archimède, il publiera un ouvrage qu'il dédiera à ce gentilhomme (¹) et où toutes les règles seront développées et démontrées ; le disciple consent d'attendre, mais demande au moins quelques exemples ; Tartaglia donne les suivants :

$$x^3 + 6x^2 = 100, \quad x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}},$$
$$x^3 + 9x^2 = 100, \quad x = -2 + \sqrt{24},$$
$$x^3 + 3x^2 = 2, \quad x = -1 + \sqrt{3},$$
$$x^3 + 7x^2 = 50, \quad x = -1 + \sqrt{11}.$$

C'est pour avoir trouvé le premier exemple d'une vérification trop pénible, qu'il a donné les trois autres ; et le gentilhomme ayant demandé un exemple de la forme

$$x^3 + n = mx^2,$$

il lui donne

$$x^3 + 4 = 5x^2, \quad x = 2 + \sqrt{8},$$
$$x^3 + 6 = 7x^2, \quad x = 3 + \sqrt{15}.$$

Ventuorthe se montre satisfait et pense pouvoir, d'après ces solutions, trouver lui-même la règle. Tartaglia le dissuade de s'appliquer à de telles recherches qui sont très-fatiguantes et sans résultats : on ne peut rien trouver par la voie des essais. Ces équations ont chacune deux solutions diverses et peut-être davantage, chaque solution nécessitera d'autres essais. Il l'exhorte à attendre patiemment la publication de son ouvrage. A cela, Ventuorthe dit qu'il est dur de croire que la même équation puisse avoir deux solutions et peut-être davantage. A cela Tartaglia répond :

Là è certo cosa dura a credere, et certamente se la sperientia non me facesse testimonianza, quesi che non il crederei.

(¹) La première partie du *General Trattato* est en effet dédiée à ce gentilhomme, dont il vante les bienfaits qu'il en a reçus.

« Certes la chose est dure à croire, et certainement si l'expérience n'en rendait témoignage, je ne le croirais presque pas ».

Il donne pour exemple l'équation

$$x^3 + 3x = 14,$$

où l'on a évidemment $x = 2$ et cependant la règle donne

$$x = \sqrt[3]{7 + 41} - \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}},$$

solution différente de 2. Ici Tartaglia commet une erreur de calcul : il faut d'après sa règle

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}},$$

et s'il s'était rappelé la règle donnée ci-dessus, il aurait trouvé

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2},$$

d'où

$$x = 2;$$

les deux autres racines sont

$$x = -1 \pm \sqrt{-6}.$$

Tartaglia ne mentionne nullement les racines imaginaires. Il paraît qu'il ne savait pas s'en rendre raison ; en général, il n'avait pas une idée nette de la multiplicité des racines ; mais il fait ici une observation importante : Il dit à son disciple que dans son ouvrage il fera voir que toutes les solutions des équations cubiques se ramènent à la solution des trois formes

$$x^3 + px = q, \quad x^3 + q = px, \quad x^3 = px + q,$$

généralisation qui indique un grand progrès analytique.

Tartaglia raconte encore dans le même *quesito* que dans la nuit

de la Saint-Martin de 1536 qui était un samedi, étant au lit sans pouvoir dormir, il avait trouvé des règles pour

$$x^6 + fx^3 = 6, \quad x^6 = fx^3 + g, \quad x^6 + g = fx^3.$$

Il en indique les solutions à son disciple qui prend congé en promettant de lui écrire dès son retour en Angleterre, et Tartaglia lui dit :

Andati, messer compare, che Iddio va dia il buon viaggo et vi prego che me scriveti subito, che vi seti aggiunto, comme haveti detto.

« Allez, mon cher ami, que Dieu vous donne un bon voyage ; et je vous prie de m'écrire dès que vous serez arrivé, comme vous l'avez promis ».

Le disciple répond : *Faro senza fallo.* (Je le ferai sans faute).

Ce sont les derniers mots des *quesiti.* Nous voyons que Tartaglia avait l'affection de ses élèves ; c'est qu'il était lui-même très-affectueux.

Tartaglia, absorbé par sa traduction d'Euclide et par les corrections d'erreurs commises par les traducteurs d'Archimède, ne s'occupait des équations cubiques que de temps à autre, tandis que Cardan, aidé de son excellent élève Louis Ferraris, s'en occupant sans cesse, parvint à donner de l'extension aux règles de Tartaglia, à résoudre les équations du quatrième degré et à donner des éclaircissements sur la nature des équations. Il réunit toutes ces règles et ces connaissances nouvelles en une théorie qu'il publia en 1545 sous le titre : *Ars magna ;* il y joignit le livre *Regula aliza* (1) où il donne le cas irréductible. Le serment de foi prêté fut violé, et ce qui devait être écrit en chiffres pour être inintelligible après sa mort fut divulgué au monde entier par des milliers d'exemplaires imprimés. Non-seulement, il manqua de foi, mais même il ne fut pas entièrement juste envers Tartaglia. Il prétend qu'après d'instantes prières, il n'en avait reçu que la solution du cube et de la chose égale au nombre ; tandis que par les tercets rapportés ci-dessus

(1) Cardan ne donne pas l'explication de ce mot.

il avait encore reçu les deux autres formes. Indigné d'une telle félonie, Tartaglia eut à soutenir, en 1547, une dernière lutte où pourtant il ne fut pas le provocateur. Voici comment il raconte ce fait dans son *General Trattato, etc.*, IIe partie, IIe livre, chapitre VII, § 7, imprimé en 1556.

« En 1547, Cardan et sa créature, Ludovic Ferraro, dans deux bulletins imprimés, me portèrent un défi. Je leur adressai trente et une questions, à condition qu'elles seraient résolues en quinze jours ; passé ce délai, les solutions devaient être considérées comme non avenues. Ils restèrent deux mois sans donner signe d'existence, et puis ils m'envoyèrent trente et une questions sans me donner la solution d'aucune des miennes ; d'ailleurs le terme fatal était dépassé de plus de quarante cinq jours. Je trouvai le jour même les solutions de dix, le lendemain de quelques autres, puis de toutes les autres, et, afin de ne pas dépasser l'intervalle de quinze jours, je me hâtai de les faire imprimer et de les envoyer à Milan. Pour cacher leur lenteur à répondre à mes questions ou du moins à quelques-unes, ils m'entretinrent d'autres choses pleines de longues sottises, et ce n'est qu'au bout de sept mois qu'ils m'envoyèrent une réponse publique, où ils se vantaient d'avoir résolu mes questions. D'abord, si même tout cela était vrai, ces solutions données si longtemps après le terme fixé n'étaient d'aucun mérite ; ensuite la plus grande partie d'entre elles étaient complétement fausses. Désirant proclamer publiquement ces faussetés et me trouvant à Brescia, dans le voisinage de Milan, je m'y rendis et envoyai à tous les deux un cartel imprimé où je les invitais à se trouver vendredi prochain, 10 août 1458, à 10 heures, à l'église surnommée le jardin dit des Frères Zoccolanti, pour discuter publiquement mes réfutations de leurs prétendues solutions. Cardan, pour ne pas se trouver à l'examen, s'éloigna précipitamment de Milan, et, au jour fixé, Ferraro vint seul au rendez-vous, et accompagné d'une foule d'amis et de plusieurs autres ; j'étais seul avec mon frère que j'avais amené avec moi de Brescia. Je me présentai en présence de toute cette multitude et commençai par exposer brièvement le sujet de la discussion et la cause de mon

arrivée à Milan. Lorsque je voulus en venir aux réfutations des solutions, on m'interrompit pendant deux heures par des paroles et des gestes, sous prétexte qu'on devait choisir, en l'endroit même, un certain nombre de juges parmi les auditeurs présents, tous amis de Ferraro et à moi entièrement inconnus. Je ne voulus pas consentir à cette astuce, et dit que mon intention était que tous les auditeurs fussent juges, de même que ceux qui liront mes réfutations lorsqu'elles seront imprimées. Enfin ils me laissèrent parler, et, pour ne pas ennuyer l'auditoire, je commençai, non par des objets fastidieux sur les nombres et la géométrie, mais il me parut convenable de réfuter la solution d'une question sur le chapitre XXIV de la Géographie de Ptolémée, et je contraignis Ferraro à convenir publiquement qu'il s'était trompé. Voulant continuer, tous se mirent à crier que je devais maintenant parler de mes propres solutions obtenues en trois jours, des trente et une questions qui me furent proposées. J'eus beau objecter qu'on devait d'abord me laisser achever ce qui concernait mes réfutations, qu'ensuite j'aborderais ce qu'ils demandaient : ni raisonnements ni plaintes ne furent écoutés ; on ne me laissa plus parler, et on donna la parole à Ferraro, qui commença par dire que je n'ai pu résoudre la quatrième question sur Vitruve, et il s'étendit là-dessus jusqu'à l'heure du souper. Chacun vida le temple et s'en alla à la maison ».

Ainsi se termina ce duel, original même en ces temps.

Tartaglia s'éloigna tout de suite de Milan, et, craignant des violences, regagna Brescia par un chemin détourné.

Dans le *Trattato général*, III[e] partie, livre III, on lit vingt-deux des trente questions de Cardan, avec leurs solutions données par Tartaglia ; il dit avoir des raisons pour ne pas envoyer à Cardan les solutions des huit autres. On y lit aussi les trente et une questions proposées par Tartaglia ; la solution de la trente et unième et dernière question est la seule qui soit exacte. Il s'agit de trouver la valeur de x dans l'équation

$$27x^9 + 36x^5 + 54x^7 + 8x^3 = 1000,$$

ils extraient la racine cubique et trouvent $3x^2 + 2x = 10$, équation cubique, et Tartaglia ne manque pas de faire observer que c'est à lui qu'ils doivent cette solution.

Voici ce qui a occasionné le terrible échec de Cardan et de Ferrari : Les quinze livres d'Euclide renferment cinq cent quatorze propositions tant géométriques qu'arithmétiques. Ce nombre comprend cent cinq problèmes dont quatre-vingt-dix-huit sont géométriques ; il y en a soixante-quinze sur un plan et vingt-trois dans l'espace. Or, Tartaglia était parvenu à résoudre soixante-sept des problèmes plans à l'aide de la règle et d'une ouverture de compas invariable, et à démontrer l'impossibilité de construire ainsi les huit restants. Cardan, portant son défi, croyait que Tartaglia ne possédait que la règle du cube, et ne se doutait pas qu'il avait encore d'autres armes ; la plupart de ses questions roulent sur cette méthode particulière de solution, à eux inconnue. Aussi furent-ils pris au dépourvu et honteusement vaincus : juste punition d'une trahison, utile, il faut en convenir, à la science ; mais toutes les fois qu'une mauvaise action a de bons résultats, il faut en remercier la Providence et nullement l'auteur qui reste toujours flétri. Tartaglia, sans avoir jamais manqué à l'honneur, n'est pas irréprochable. Sa découverte de 1530 n'est pas encore publiée par lui-même en 1556. Il la tenait en réserve, comme il a été dit, pour son grand ouvrage *General Trattato*, divisé en six parties ; or il est mort en 1556 pendant l'impression de la cinquième partie. La sixième partie, consacrée à l'algèbre, devait renfermer les règles pour la résolution de l'équation cubique. Curtio Trajano, libraire, qui a fait imprimer à Venise les cinq premières parties, chargea un savant mathématicien (*un dotto matematico*) de réunir et de mettre en ordre tous les manuscrits laissés par Tartaglia pour cette dernière partie. Or on n'a jamais imprimé que le premier livre de cette sixième partie, où l'on ne trouve que les règles pour les opérations algébriques et rien sur l'équation cubique. Le libraire a-t-il refusé les fonds pour imprimer le reste, ou le mathématicien s'est-il mal acquitté de sa besogne ? Ce qui est certain, c'est que sans les traîtreuses révélations de Cardan, on serait resté

encore longtemps sans savoir résoudre les équations cubiques, et, par conséquent aussi, les équations biquadratiques. En mathématiques, il ne faut, sous aucun prétexte, différer longtemps. Car ce que l'un découvre au Nord, un autre le découvrira au Midi, et, comme dit très bien Arago, la priorité appartient à celui qui *publie* le premier ; et dussiez-vous prouver invinciblement que vous avez eu la même idée il y a vingt ans, la réclamation est de nulle valeur, votre droit est périmé. Ce qui est arrivé à Tartaglia, et depuis à Newton pour le calcul infinitésimal, sont des enseignements que nos grands géomètres ne devraient pas oublier et qu'ils oublient toujours.

Nous croyons intéressant de complèter la notice historique de Terquem par la méthode d'approximation que M. A. Hermann a donnée en 1869 dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, qui permet de résoudre l'équation du 3e degré sans faire intervenir les fonctions trigonométriques.

I. — *Exposé de la méthode*

Lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, la formule de Cardan devient illusoire et ne peut pas servir au calcul numérique des racines de l'équation ; il est cependant possible, dans ce cas, d'exprimer les racines à l'aide de formules pouvant servir à leur calcul numérique.

Soit

$$x^3 - px - q = 0$$

l'équation du troisième degré, dans laquelle je mets les signes en évidence. Je puis écrire l'équation sous la forme

$$x^3 = px + q,$$
$$x^2 = p + \frac{q}{x},$$
$$x = \sqrt{p + \frac{q}{x}},$$

le radical ayant une double détermination et la valeur de x sous le radical ayant le même signe que le radical. Cette formule peut servir de formule d'approximation successive pour deux racines de l'équation du troisième degré.

Celle qui correspond au signe + du radical est évidemment supérieure à $\sqrt{p}$;

$$x_1 = \sqrt{p}$$

est une valeur de cette racine approchée par défaut;

$$x_2 = \sqrt{p + \frac{q}{x_1}}$$

une valeur approchée par excès;

$$x_3 = \sqrt{p + \frac{q}{x_2}}$$

une valeur approchée par défaut.

Cette racine x' peut être exprimée à l'aide d'un nombre illimité de radicaux par la formule

$$x' = \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \ddots}}}}}.$$

La deuxième x'' ne peut être exprimée que par défaut par la formule

$$x'' = -\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \ddots}}}}}.$$

Ces formules sont susceptibles d'une interprétation géométrique très simple.

Les racines de l'équation du troisième degré peuvent être considérées comme les abscisses des points communs à la parabole et à l'hyperbole :

$$x^2 = y,$$
$$xy = px + q,$$
$$y = p + \frac{q}{x}.$$

Nous cherchons l'abscisse du point a.

La première valeur approchée

$$x_1 = \sqrt{p}$$

représente l'abscisse du point a_1, la deuxième l'abscisse du point a_2, la troisième l'abscisse du point a_3, etc. On voit sur la figure comme sur la formule que ces valeurs vont constamment en se rapprochant de la racine exacte.

La troisième racine peut être obtenue d'une manière un peu différente. L'équation peut s'écrire

$$x = -\frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La troisième racine est négative et supérieure en valeur absolue à $\frac{q}{p}$.

$$x_1 = -\frac{q}{p}$$

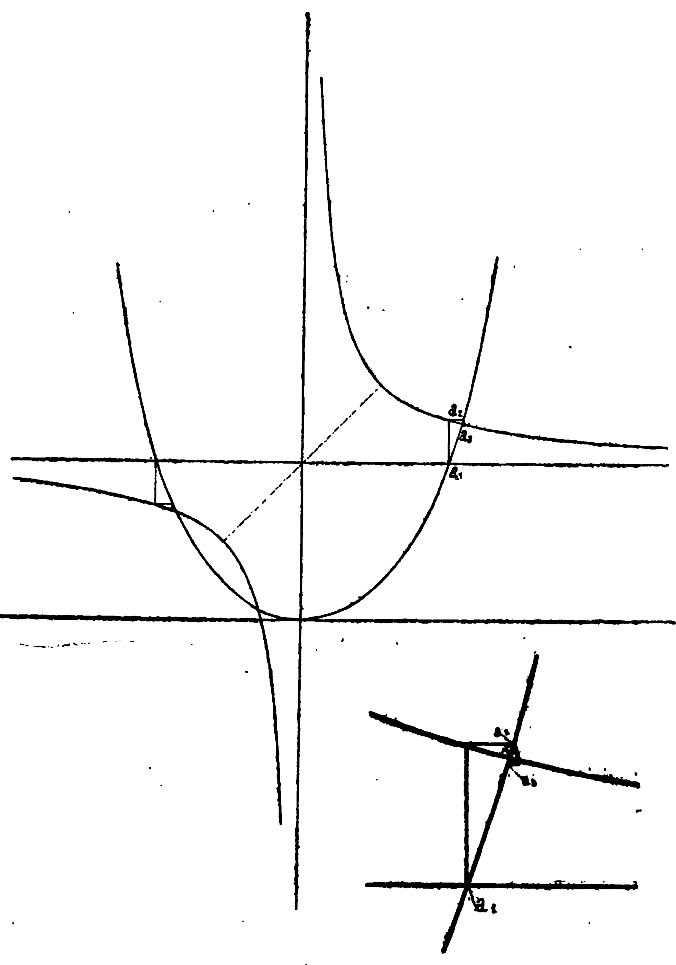


Fig. 157

est une première valeur approchée de cette racine ;

$$x_2 = -\frac{q}{p} + \frac{x_1^3}{p}$$

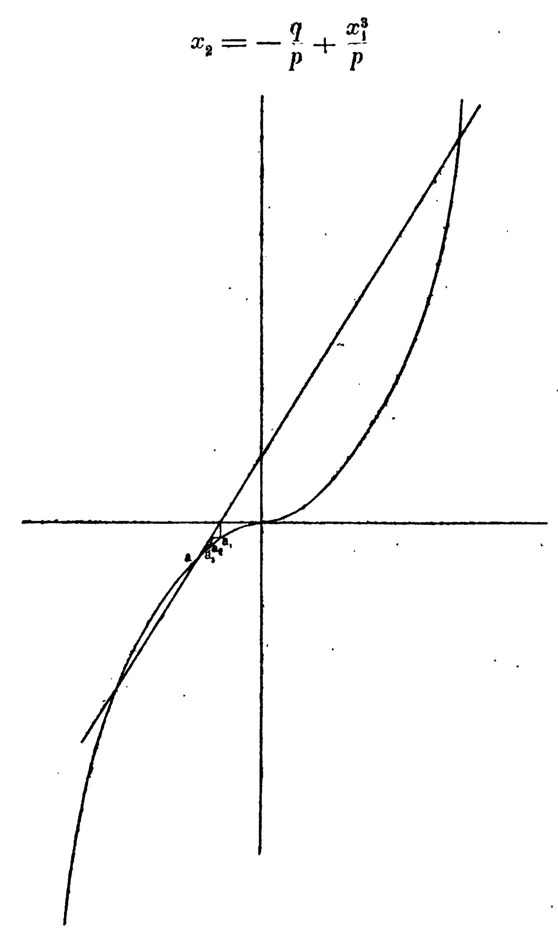


Fig. 158

une deuxième valeur plus approchée, etc.



Cette formule est également susceptible d'une interprétation géométrique.

La racine que nous cherchons est l'abscisse de l'un des points d'intersection de la parabole cubique et de la droite

$$y = px + q.$$

La méthode d'approximation substitue à l'abscisse des points a les abscisses des points a_1, a_2, a_3..., etc.

II. — *Calcul de l'erreur commise dans le calcul des racines par la méthode précédente après un certain nombre d'opérations.*

Considérons d'abord la première racine exprimée par la formule

$$x = \sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cdots}}}}}.$$

Désignons par ε_1, ε_2,..., ε_n les erreurs commises après 1, 2, 3,..., n opérations, nous aurons

$$\varepsilon_1 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p} \quad \text{ou} \quad < \frac{\frac{q}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p} + \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}};$$

j'augmente évidemment le deuxième membre en remplaçant

$$\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} \text{ par } \sqrt{p}.$$

J'aurai donc

$$\varepsilon_1 < \frac{q}{2p};$$

j'aurai de même

$$\varepsilon_2 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{\frac{q}{\sqrt{p}} - \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} + \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}}},$$

ou

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{\sqrt{p}\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}\left[\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} + \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}}\right]},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{2p\sqrt{p}} \quad \text{ou} \quad \frac{q}{2p}\,\frac{q}{2p\sqrt{p}}.$$

On trouvera de même

$$\varepsilon_3 < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^2,$$

. . . .

$$\varepsilon_n < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^{n-1}.$$

La méthode que je viens d'indiquer pour calculer une limite de l'erreur sera applicable toutes les fois que l'on aura

$$q < 2p\sqrt{p} \quad \text{ou} \quad q^2 < 4p^3.$$

Elle sera donc applicable dans une limite plus étendue que celle de la réalité des racines de l'équation du troisième degré, puisque,

pour la réalité des racines, il suffit que l'on ait

$$27q^2 < 4p^3.$$

Si $q = 1$,

$$p = 100,$$

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{200} \times \frac{1}{2\,000} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{400\,000}.$$

Cette méthode est donc assez commode pour le calcul des racines, lorsque q est petit par rapport à p.

On pourrait de même calculer une limite de l'erreur commise dans le calcul des deux autres racines ; mais comme la méthode que j'indique ne me paraît avoir d'intérêt qu'au point de vue théorique, ce que j'ai dit suffit pour le but que je me propose.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V

Questions de Géométrie

Pages

CHAPITRE VI

Questions de Mécanique

CHAPITRE VII

Questions diverses

CHAPITRE VIII

Des carrés magiques

CHAPITRE IX

Problèmes des tracés continus

CHAPITRE X

Trois problèmes de géométrie

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie Bussière